

Forelesning nr.4 analog elektronikk IN 1080 Mekatronikk

Analyse av RC-kretser
Induksjon

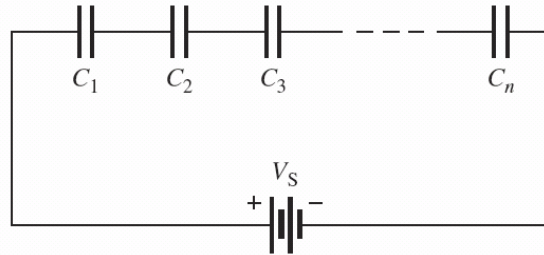


Dagens temaer

- Analyse av RC-kretser i tidsplanet
- Frekvens vs tid
- Induksjon
 - Induktorer
 - Elektromotorer

Kapasitans for seriekoblede kondensatorer

$$V=Q/C$$



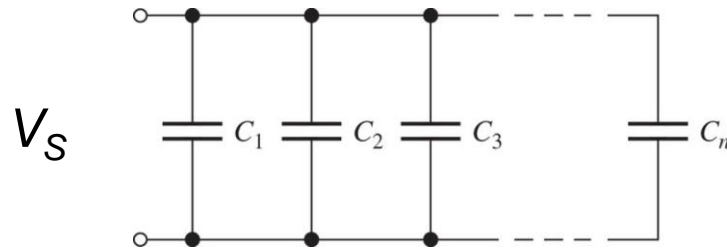
$$I = \frac{Q}{t}$$

- Hver kondensator lagrer samme ladning fordi strømmen mellom hvert element er den samme: $Q_{Tot} = Q_{C1} = Q_{C2} = \dots = Q_{Cn}$
- KVL gir at $V_S = V_{C1} + V_{C2} + \dots + V_{Cn}$
- Dette gir

$$\frac{Q}{C_{Tot}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots + \frac{Q}{C_n} \Rightarrow \frac{1}{C_{Tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \Rightarrow C_{Tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

- Utrykket har samme form som resistorer i *parallel*

Kapasitans for parallellkoblede kondensatorer



- Den totale ladningen er lik summen av ladningene over hver kondensator:

$$Q_{Tot} = Q_{C_1} + Q_{C_2} + \dots + Q_{C_n}$$

- Siden $Q=CV$, blir $C_{Tot} V_S = C_1 V_S + C_2 V_S + \dots + C_n V_S \Rightarrow C_{Tot} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$
- Uttrykket har samme form som resistorer i *serie*

Respons

- Respons betyr hvordan en krets oppfører seg for en gitt type input
- Det er vanligst å se på forholdet mellom strøm og/eller spenning på inngang og utgang enten som funksjon av **tid** eller **frekvens**
- Har sett på sammenhengen mellom strøm og spenning i en RC-krets når kilden var en **sinusformet** spenning
- Oppførselen til en RC-krets når kilden genererer en firkantpuls kalles **pulsrespons**
- Et spesialtilfelle av pulsrespons kalles **naturlig respons**, hvor man ser på hvordan kretsens oppførsel når kilden er fjernet
- **Frekvensrespons** betyr at vi analyser oppførelen til kretsen når frekvensen til input-signalet varierer istedenfor å la tiden variere.

Naturlig respons

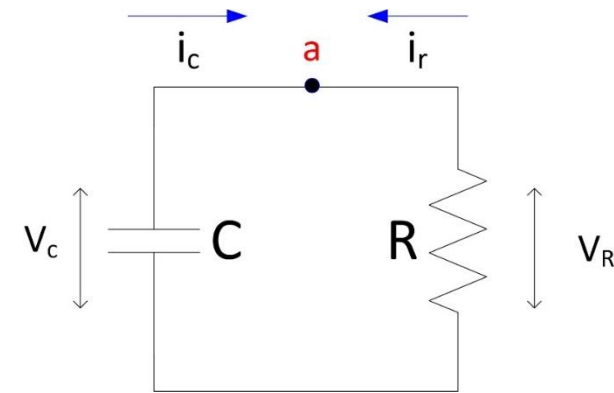
- Naturlig respons er oppførselen når kretsen ikke lenger er utsatt for ytre påvirkning fra strøm- eller spenningskilder
- Vi antar at det har vært en påvirkning som gjør at det f.eks fortsatt går en strøm eller at en kondensator er oppladet.
- Ved tidspunkt $t=0$ fjernes strøm- og spenningskilder og videre oppførsel bestemmes bare av kretsens „naturlige“ egenskaper

Naturlig respons for RC-krets (1)

- Antar at kondensatoren er helt oppladet ved tidspunkt $t=0$ med spenningen $v_c=V_0$
- Kondensatoren vil utlades gjennom R og vi ønsker et uttrykk for hvordan v_c endrer seg over tid som funksjon av V_0 , R og C
- Bruker KCL mot node **a**:

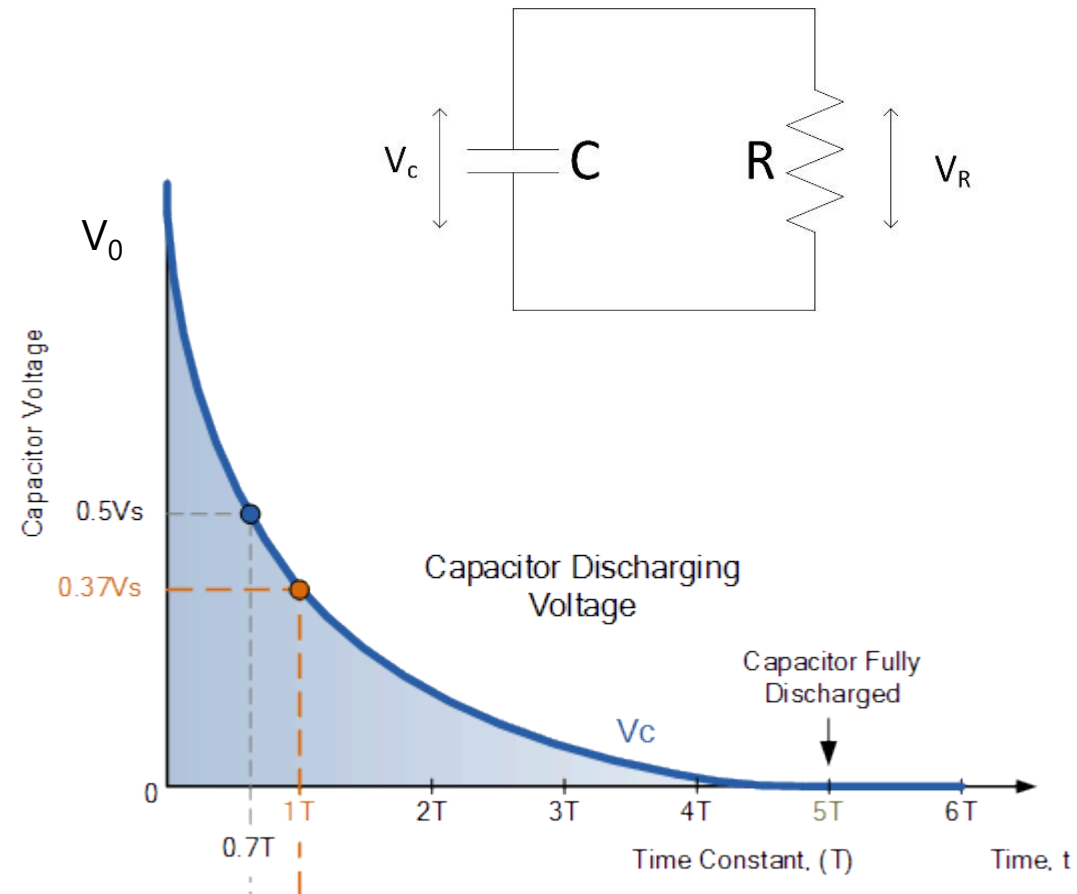
$$i_c + i_r = 0 \implies C \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_R}{R} = 0 \implies C \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R} = 0 \iff \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = 0$$

- Løsningen til denne differensial-ligningen er $v_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$
(skal ikke vise fremgangsmåten for å løse den)



Naturlig respons for RC-krets (2)

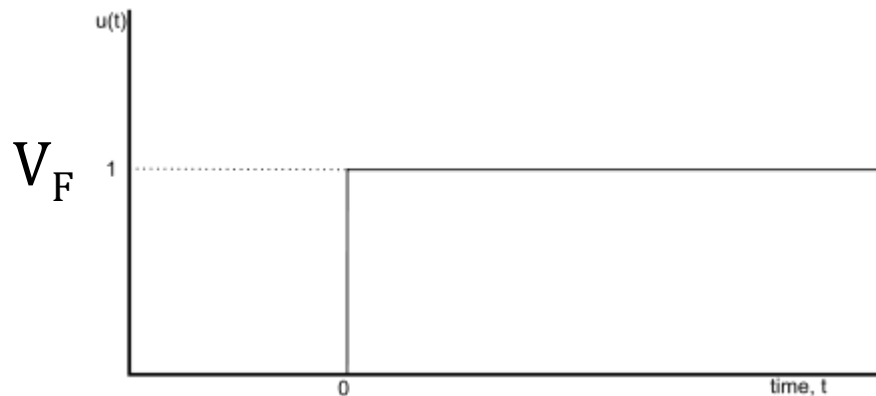
- Vi kaller $\tau = RC$ for *tidskonstanten*
- $v_c = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Tidskonstanten gjør at alle RC-kretser får samme form på utladningskurven, uavhengig av verdien til R og C



Pulsrespons for RC-krets (1)

- Formelen for den naturlige responsen kan «utvides» for å finne *pulsresponsen* til en RC-krets
- Spenningskilden er en dc-kilde som går fra 0 volt til V_F volt
- Vi skal se hvordan kondensatoren *lades opp* fra 0v til V_F gjennom en resistor

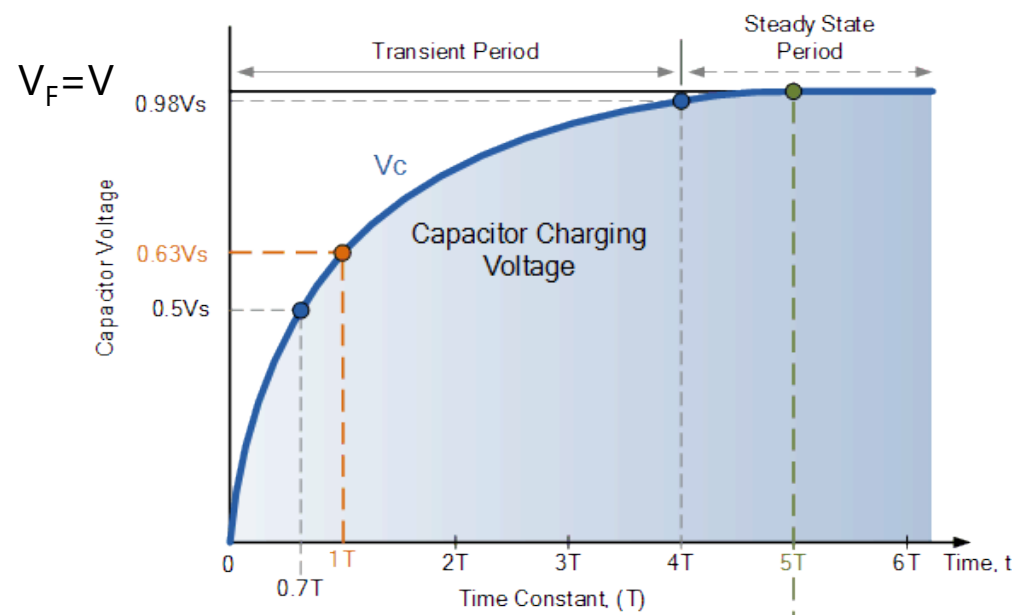
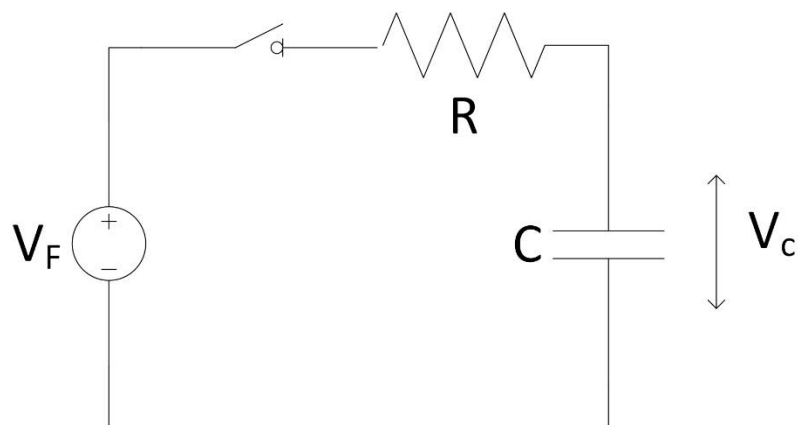
$$V = 0; \quad t_0 < 0$$
$$V = V_F; \quad t_0 \geq 0$$



Pulsrespons for RC-krets (2)

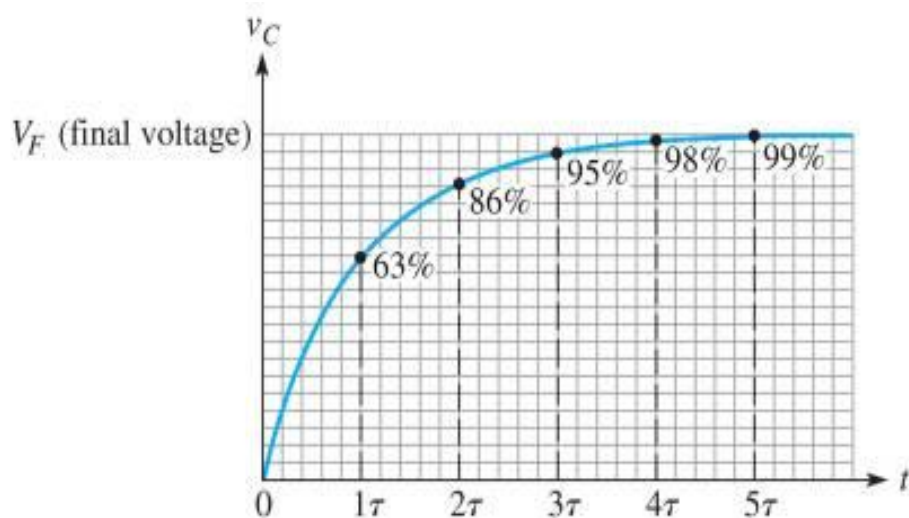
- Pulsrespons kan lages ved en ideel bryter som kobler en dc-kilde med spenning V_F til kretsen ved tidspunkt $t=0$. Antar $v_c=0v$ over kondensatoren for $t<0$
- Oppladningskurven er gitt av

$$v_c = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

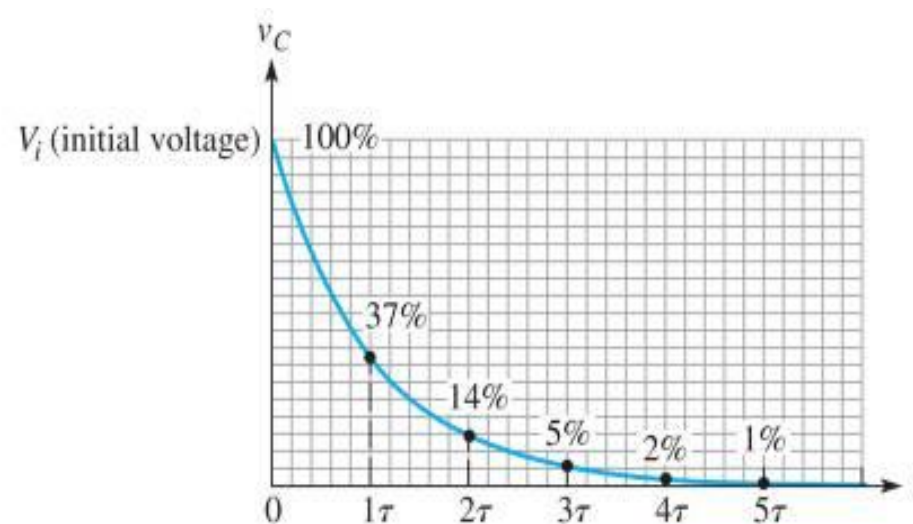


Pulsrespons for RC-krets (3)

- Når $\tau = 1$ betyr det at
 - En helt utladet kondensator har ca 63% av den maksimale spenningen etter at den er koblet til en spenningkilde
 - En fullt oppladet kondensator har ca 37% av den opprinnelige spenningen etter at kilden er koblet fra
- Opp/utladningskurvene er eksponensielle



(a) Charging curve with percentages of the final voltage



(b) Discharging curve with percentages of the initial voltage

Pulsrespons for RC-krets (4)

- Generelt benytter man indeksene 'F' = «Final» og 'i' = «initial»
- Hvis man lader *ut* fra V_F til 0 blir formelen $v_C = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Hvis man lader *opp* fra 0 til V_F , blir formelen $v_C = V_F (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
- De generelle formlene for oppladning og utladning av en kondensator som lades opp/ut via en resistor er gitt av

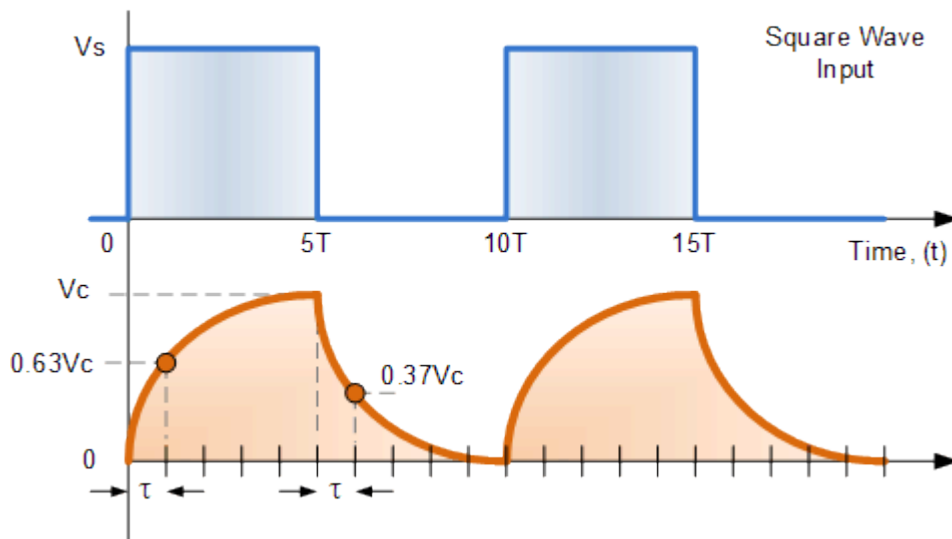
$$v = V_F + (V_i - V_F) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = I_F + (I_i - I_F) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

der V_F og I_F er slutt-verdiene, og V_i og I_i er startverdiene

Pulsrespons for RC-krets (5)

- Vi kan nå generalisere til en generell puls og ta hensyn til at kondensatoren eventuelt ikke lades helt opp/helt ut



$$v = V_F + (V_i - V_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i = I_F + (I_i - I_F)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Generelt

$$v_C = V_F(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Oppladning
fra 0 til V_F

$$v_C = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Utladning
fra V_F til 0

Oppsummering puls- og naturlig respons

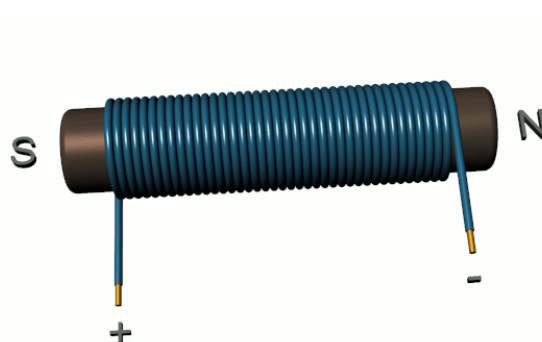
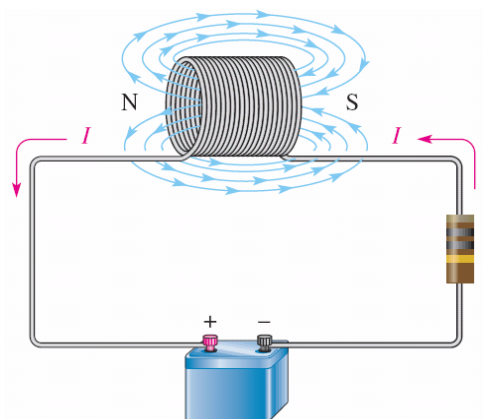
- Hva er viktig å kunne/huske:
 - **Oppladning** og **utladning** skjer ikke momentant
 - Opp- og utladningskurvene er **eksponensielle**, og ikke lineære
 - **Naturlig respons** er oppførselen ETTER at spenningskilden er kortsluttet (ingen påvirkning fra eksterne kilder)
 - **Pulsrespons** er oppførselen når
 1. spenningskilden går fra max spenning til 0 (tilsvarer naturlig respons)
 2. spenningskilden går fra 0 til max spenning
- **Tidskonstanten** $\tau=RC$ sier hvor raskt utladningen eller oppladningen skjer
- Ligningen for **utladning** er $v_C = V_F e^{-\frac{t}{\tau}}$
- Ligningen for **oppladning** er $v_C = V_F (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$
- Etter $t = \tau 5$ er kondensatoren nesten helt oppladet eller helt utladet
- Vi må **regne ut RC** for å finne opp/utladningstiden for en konkret RC-krets

Magnetfelt og induksjon

- **Induktorer** (norsk: spole) er et passivt, **frekvensavhengig** kretselement
- Inne i induktoren lager elektromagnetisk induksjon et magnetfelt som gir et elektrisk felt (spenning) fordi en strøm varierer
- Magnetfeltet kan også generere en ny elektrisk strøm i en annen leder i nærheten og dette kan brukes til å lage en **transformator**
- I en **elektromotor** lager vi et varierende magnetfelt vha en elektrisk strøm, hvor magnetfeltet brukes til å få en annen magnet til å dreie rundt
- I en **generator** lages en elektrisk strøm ved at en permanentmagnet roteres vha en mekanisk kraft (vind, fossefall, bølger etc) og lager en elektrisk strøm i en spole

Induktorer

- En induktor (spole) består av en isolert elektrisk leder surret rundt en metallkjerne eller et ikke-magnetisk materiale



- Hver vinding rundt kjernen gir en magnetisk feltlinje; jo flere vindinger desto flere feltlinjer og sterkere magnetfelt
- En spole kan derfor tenkes på som en *elektromagnet*, dvs en type magnet hvor magnetfeltet lages vha en elektrisk strøm

Induktorer (forts)

- Magnetfeltet lager (induserer) en elektrisk spenning som motarbeider *endringer* i strømmer gjennom spolen
- Styrken på magnetfeltet er proporsjonal med endringen i strømmen gjennom spolen
- Den induserte spenningen er proporsjonal med *endringen* i strømmen

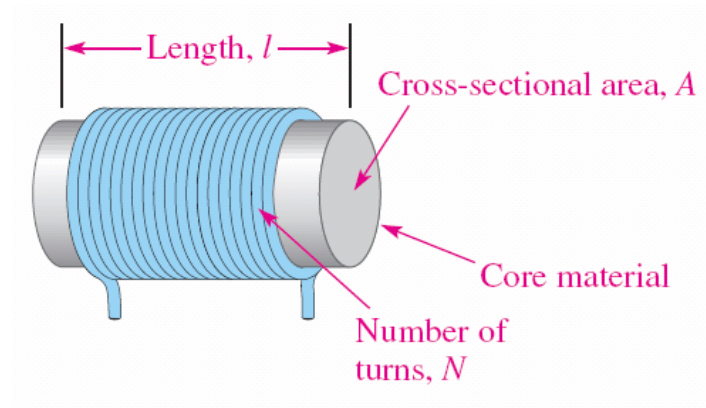
$$v = L \frac{di}{dt}$$

- Ved likestrøm vil en spole ha null induktiv impedans, mens den øker med økende frekvens

Induktorer (forts)

- Induktans L måles i $\text{Henry}=\Omega\text{s}$ og uttrykker spolens evne til å indusere spenning etterhvert som strømmen gjennom spolen endrer seg
- Merk likheten mellom L og C , og forskjellen til R

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l}$$

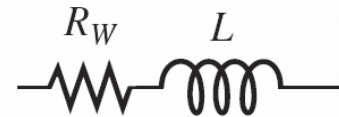
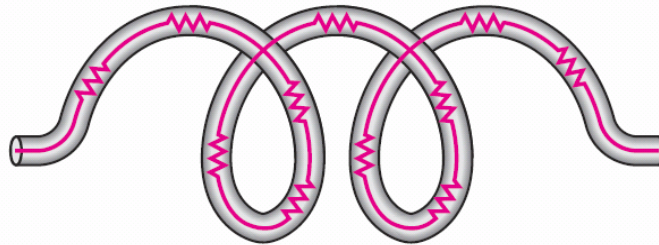


Induktorer (forts)

- Motstanden mot strøm kalles for *induktiv reaktans* og er gitt av

$$X_L = 2\pi fL$$

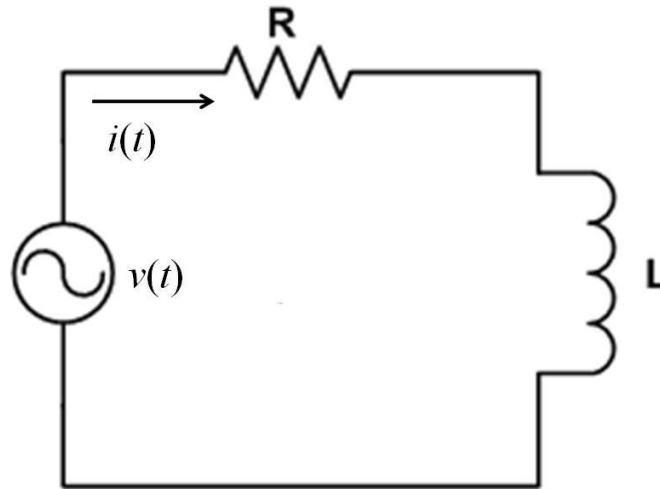
- Spoler har i tillegg resistans som kalles viklingsresistans R_w og skyldes at lederen har ohmsk motstand



Tidskonstant i RL-kretser

- RL-tidskonstanten er forholdet mellom induktansen og resistansen:

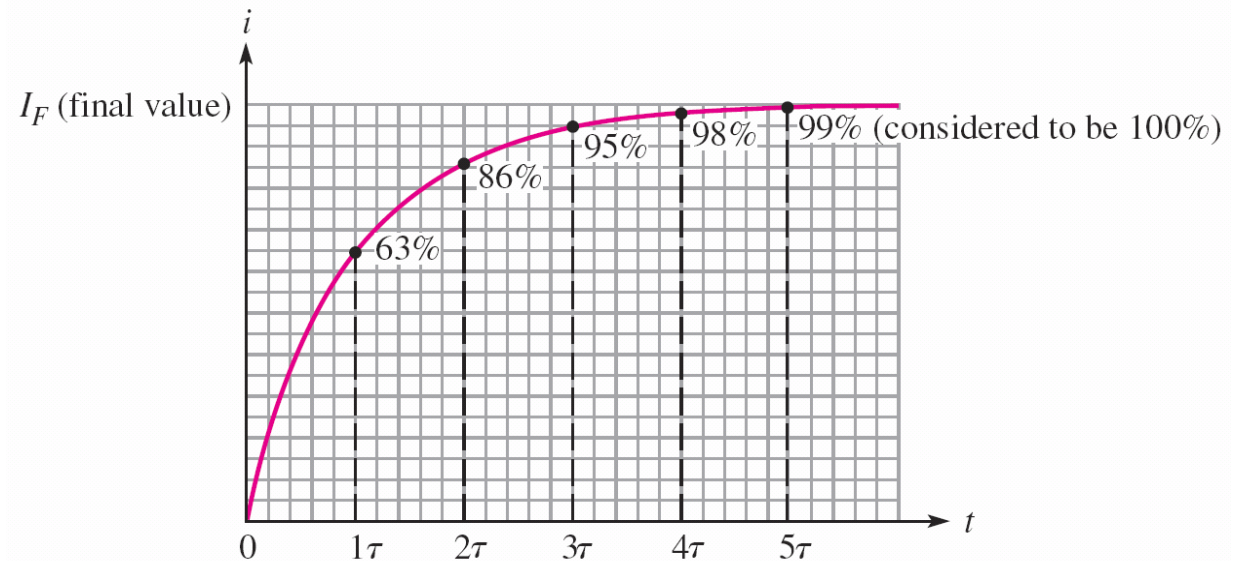
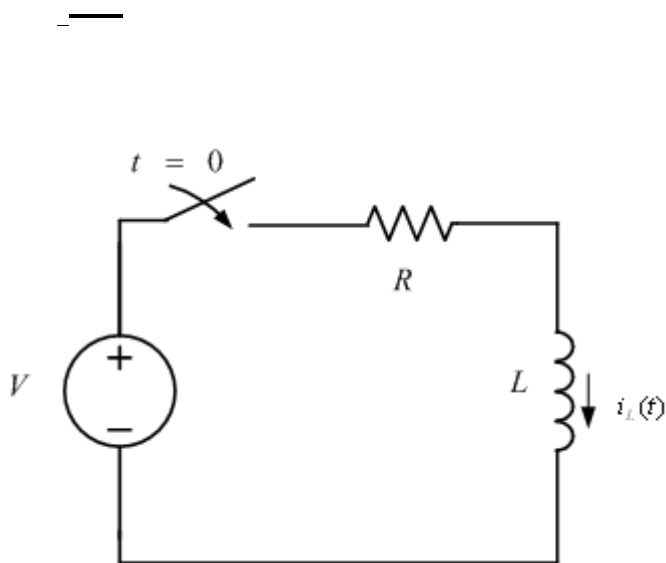
$$\tau = \frac{L}{R}$$



- Tidskonstanten angir hvor fort strømmen kan endre seg i en spole: Jo større induktans, desto lengre tid tar det å endre strømmen

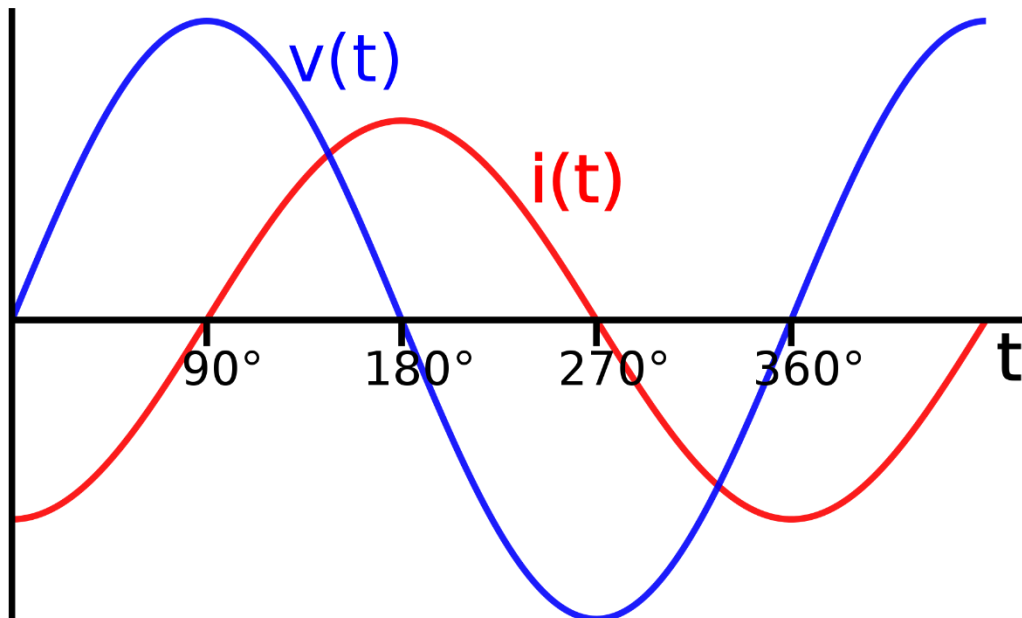
Strøm i RL-kretser

- Hvis en spole kobles *til* en spenningskilde vil strømmen gjennom spolen *øke* eksponensielt:



Forholdet I-V i en spole

- Mens i_c ligger 90° **foran** v_c i en kondensator er det motsatt i en spole: i_L ligger 90° **bak** v_L

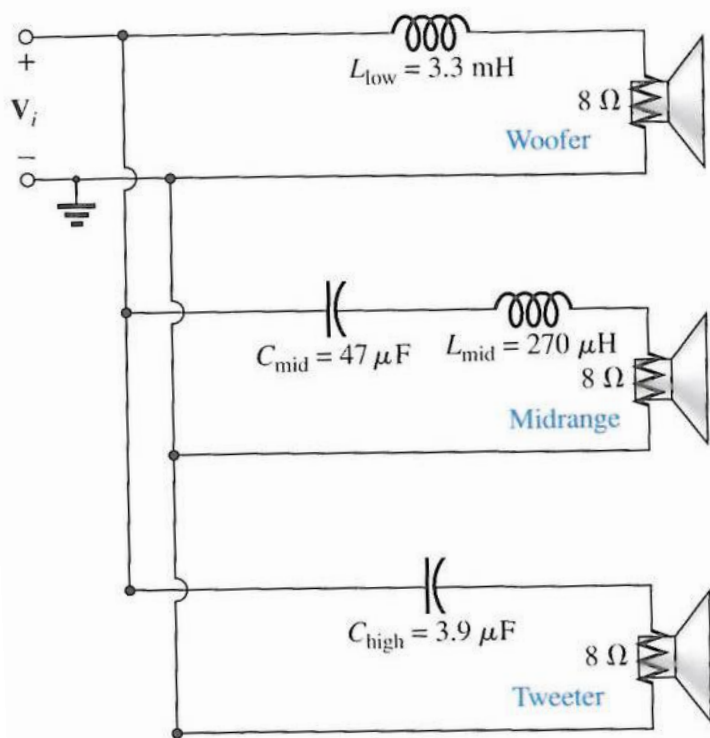


Anvendelse av spoler

- Spoler brukes mindre enn kondensatorer, men svært nyttige i noen anvendelser:
 - . Fjerning av uønskede høyfrekvenssignaler i lange ledere
 - . Aktive og passive filtre
 - . Frekvenstuning i trådløs kommunikasjon (oscillatorer og syntesisere)
- Induktiv reaktans må kontrolleres i alle elektroniske systemer
 - . Setter begrensinger på bla maksimal lengde på ledere

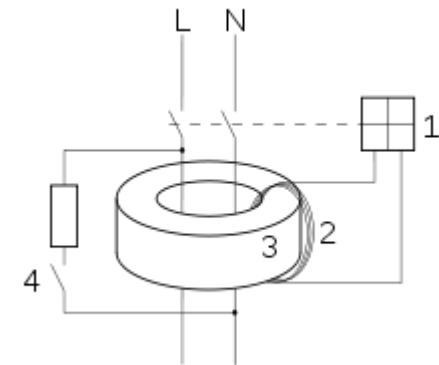
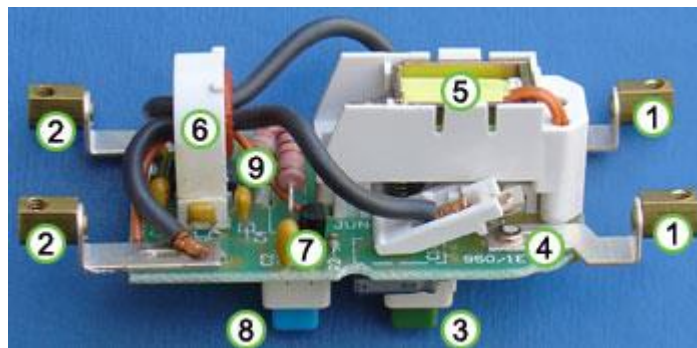
Eksempel på bruk: Delefilter til høyttaler

- Hvert høyttalerelement er laget for et bestemt frekvensområde



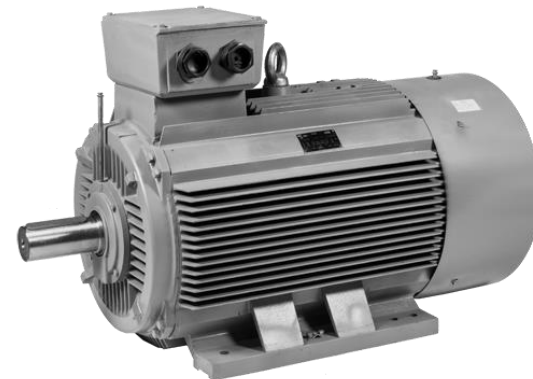
Eksempel på bruk: Jordfeilbryter

- Løser ut en sikring hvis det er jordfeil, dvs hvis én av de to lederne har forbindelse mot jord



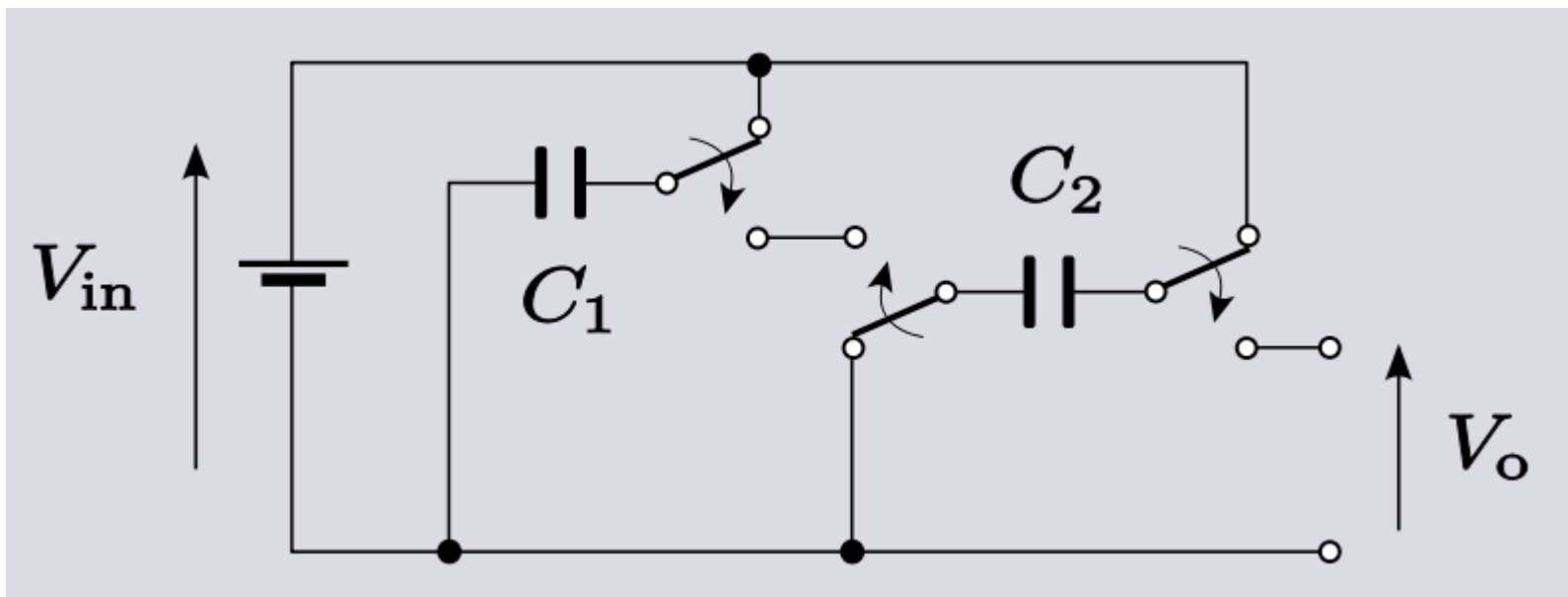
Elektromotorer

- Grunnlaget for den industrielle revolusjonen på slutten av 1800-tallet
- Den effekten en motor leverer måles i kW eller hestekrefter (historisk)
 - $1 \text{ Hk} \approx 736 \text{ W}$
- Utviklingen av effektive (mest mulig av strøm omdannes til bevegelse, ikke varme) er en viktig for tog og elbiler
- Elektromotorer lages i størrelser fra milliWatt (0.001W) til 100 MegaWatt (100 000 000 W)



Nøtt til neste gang

- Hva gjør denne kretsen? (dvs hva er sammenhengen mellom V_{in} og V_o når bryterene åpnes og lukkes?) Anta ideelle kondensatorer

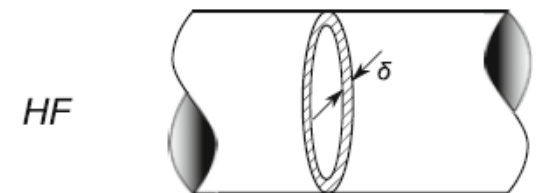
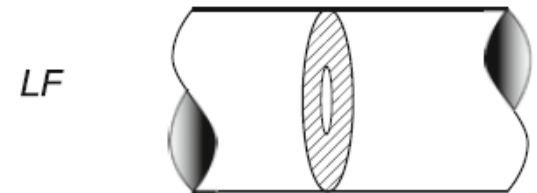
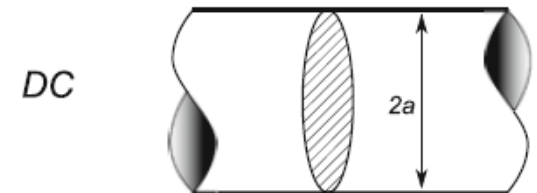
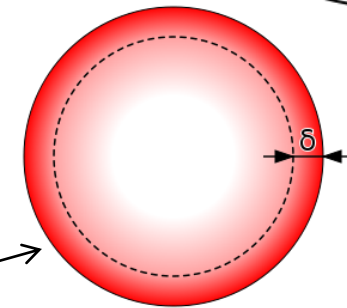
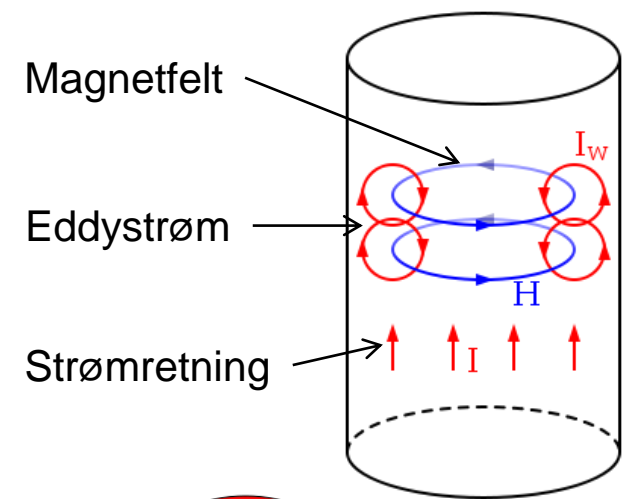


Impedans i resistorer, kondensatorer, spoler og ledere ved høye frekvenser

- Har antatt hittil at ledere null resistans, og at resistans er konstant og frekvensuavhengig
- Virkelighetens verden er mer kompleks:
 - Resistansen i ledere er frekvensavhengig
 - Kondensatorer blir til spoler ved høye frekvenser
 - Spoler blir til kondensatorer ved høye frekvenser
 - Resistorer blir til kondensatorer ved middels høye frekvenser og spoler ved veldig høye frekvenser
- **Konsekvens:** En krets må designes for et bestemt frekvensområde og vil ikke nødvendigvis fungere utenfor dette!

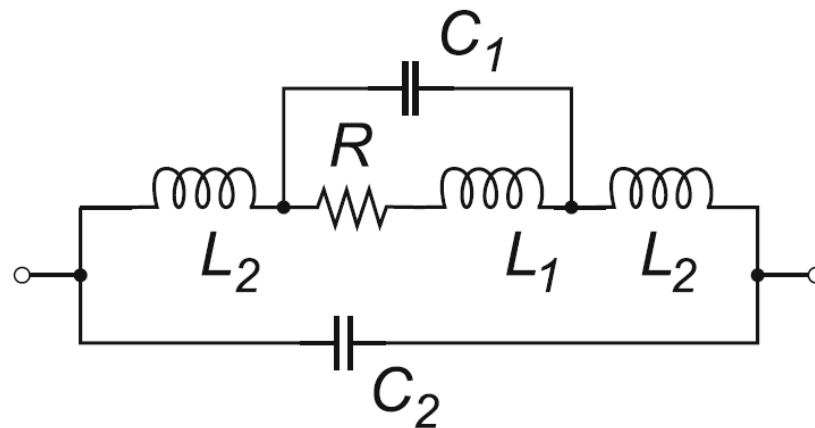
Nøyaktigere modell av ledere

- Ideell: Ledere har ikke kapasitans eller induktans, men noe resistans
- Fysisk leder: Nærhet til andre ledere og hvordan den er plassert kan lage parasittkapasitans og -induktans
- Eddystrømmer går på tvers av magnetfeltet ved ωc
- Skin-effekten skyldes Eddystrømmer som reduserer det effektive tverrsnittet med frekvensen (strømmen går bare langs ytterkanten av ledere); resistansen øker med økende frekvens
- Signaler med ulike frekvenser vil møte ulik resistans gjennom samme leder

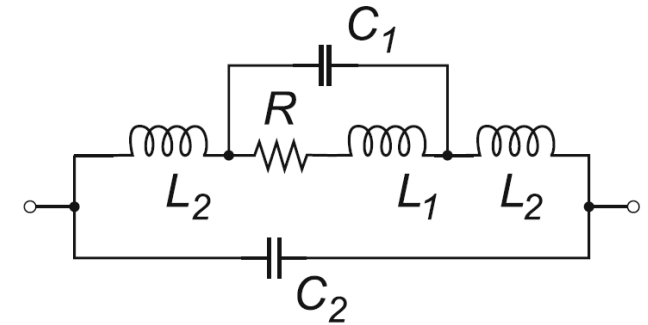


Nøyaktigere modell av resistor (1)

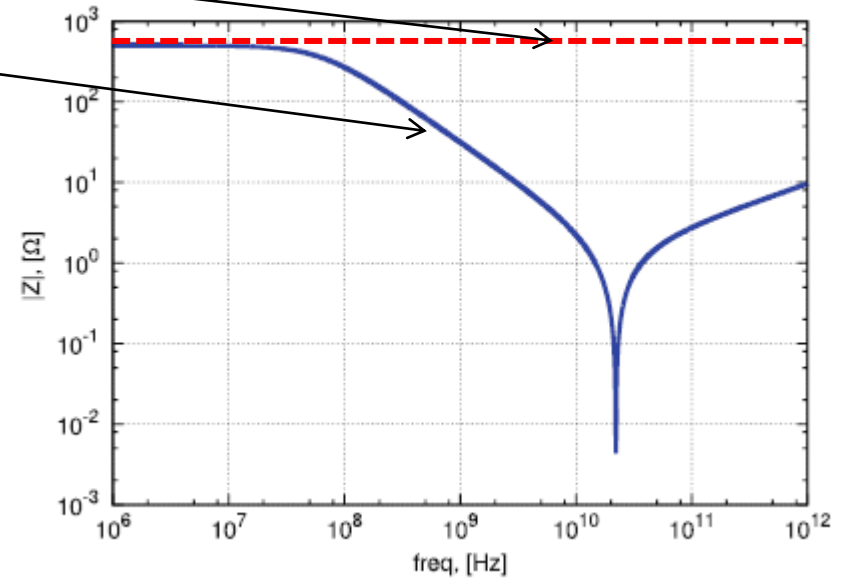
- Ideell: Impedans er uavhengig av frekvens
- I praksis blir resistorer kompliserte kretser når frekvensen blir høy (GHz)
- Årsak: Resistorer bygges med flere ulike materialer med ulike egenskaper for å gi ideell resistans innenfor et bestemt frekvensområde
- Utenfor dette området er karakteristikken langt fra ideell
- Signaler med ulike frekvenser vil møte ulik resistans gjennom samme leder



Nøyaktigere modell av resistor (2)

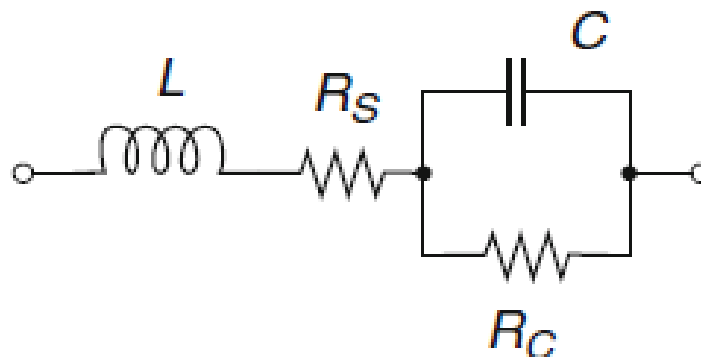


- Ideell karakteristikk
- Fysisk karakteristikk
 - 0 til 20 MHz: Ideell
 - 100MHz til 10GHz: Kapasitansen dominerer
 - 10-30 GHz: Brått fall i Z (resonans)
 - Fra 30 GHz : Induktans dominerer

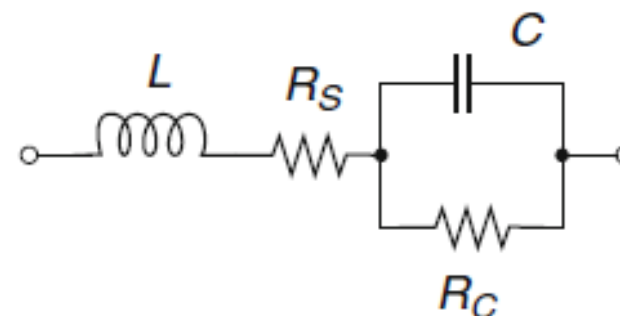


Nøyaktigere modell av kondensator (1)

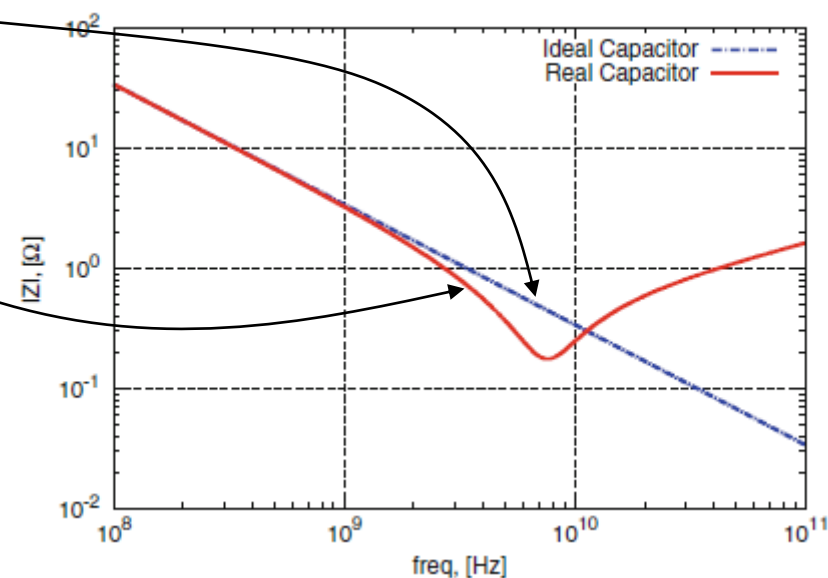
- Ideell karakteristikk: Impedansen faller proporsjonalt med frekvensen
- I praksis blir også kondensatoren en komplisert krets etter hvert som frekvensen øker



Nøyaktigere modell av kondensator (2)

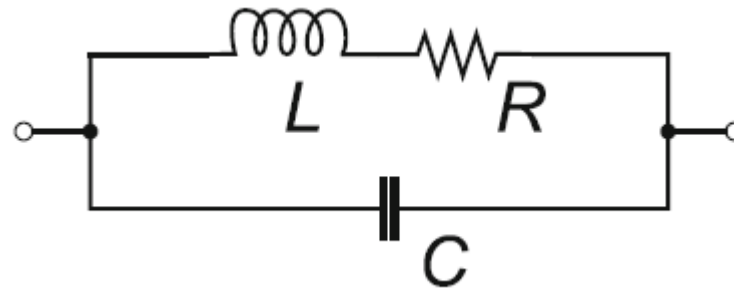


- Ideell karakteristikk
- Fysisk karakteristikk
 - Under 1 GHz: Nær ideell kondensator
 - 1 til 10 GHz: Fall i impedansen (resonans)
 - Over 10 GHz: Induktiv impedans dominerer og kondensatoren oppfører seg mer som en spole

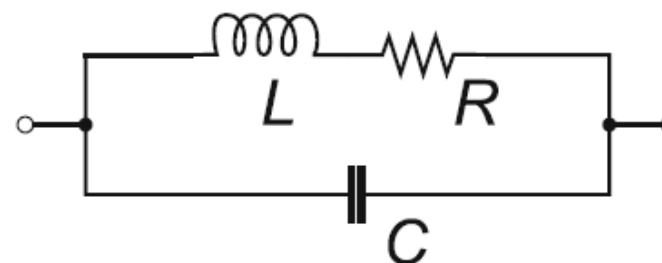


Nøyaktigere modell av induktor (1)

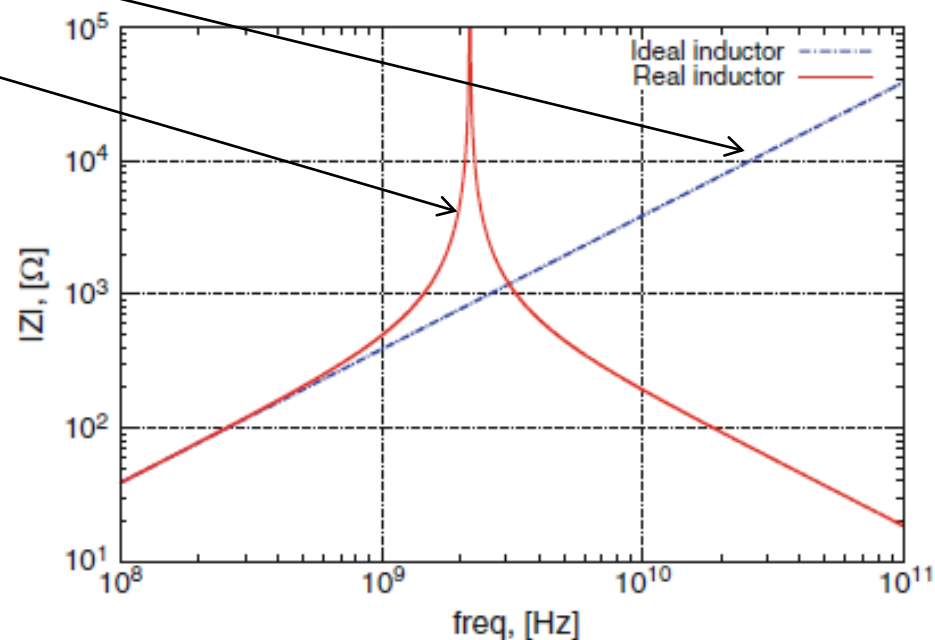
- Ideell induktor: Lineær sammenheng mellom impedans og frekvens
- I praksis mer komplisert, men allikevel enklere enn resistorer og kondensatorer



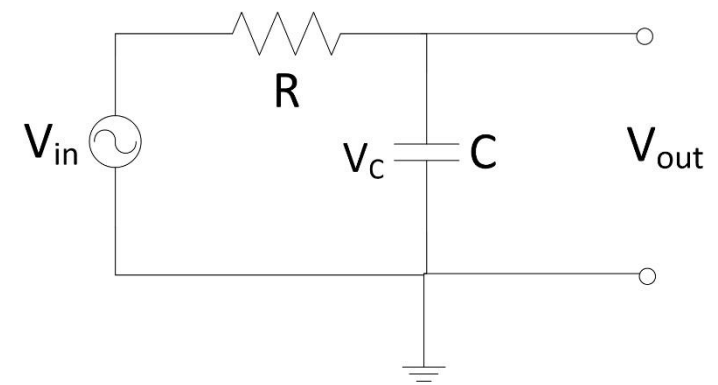
Nøyaktigere modell av induktor (2)



- Ideell karakteristikk:
- Fysisk karakteristikk
 - Under 1GHz: Følger ideell induktor
 - 1-10 GHz: Sterkt økning i impedansen (resonans)
 - Over 10 GHz: Parasittkapasitansen dominerer fullstendig og spolen oppfører seg som en kondensator



Oppgaver



- **Spm 1:** Gitt RC-kretsen oppe til høyre. Hva er sammenhengen mellom V_{out} og V_C ?
- **Spm 2:** Hvordan kan vi finne fasevinkelen (faseforskyvning mellom Z og R) for denne kretsen?
- **Spm 3:** Anta at $R=1\text{k}\Omega$ og $C=0,01\mu\text{F}$. Finn den totale impedansen Z og fasevinkelen θ mellom R og Z for følgende tre frekvenser:
 - Spm 3.1: 10 kHz
 - Spm 3.2: 20 kHz
 - Spm 3.3: 30 kHz
- **Spm 4:** Hva er V_{out} uttrykt ved V_{in} , R og X_C ?
- **Spm 5:** Forklar hva som skjer med amplituden til V_{out} når frekvensen til V_{in} øker
- **Spm 6:** Forklar hva som skjer med fasevinkelen mellom V_{in} og V_{out} når frekvensen til V_{in} øker
- **Spm 7:** Hva skjer med tidsforsinkelsen mellom V_{in} og V_{out} når frekvensen til V_{in} øker?

Oppgaver

- **Spm 1** : Hva er faseforskjellen mellom strøm og spenning gjennom en kondensator?
- **Spm 2**: Hva er formelen for tidskonstanten til en spole, og hva sier den?
- **Spm 3-1** : Hva er en kondensators impedans ved $f = 0$ Hz, og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 3-2** : Hva er en kondensators impedans ved $f \approx \infty$ og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 4-1** Hva er en spoles impedans ved $f = 0$ Hz, og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 4-2** : Hva er en spoles impedans ved $f \approx \infty$ og hva kan den erstattes med i dette tilfellet?
- **Spm 5**: Hva er måleenheten for induktans?
- **Spm 6** : Hva er faseforskyvningen mellom strøm og spenning i en spole?

Oppgaver

- **Spm 1:** Hva sier tidskonstanten?
- **Spm 2:** Hvis en kondensator lades ut gjennom en resistor, hvor mye har spenningen falt til etter $\tau=1$?
- **Spm 3:** Hvis en kondensator lades opp gjennom en resistor, hvor mye har spenningen økt etter $\tau=1$?
- **Spm 4:** For hvilken τ regner man at kondensatoren er enten helt oppladet eller utladet, og hvorfor?
- **Spm 5:** Hvis vi ønsker $\tau=16\text{ms}$ for $R=4\text{k}\Omega$, hva må da kapasitansen være?
- **Spm 6:** Hva er tidskonstanten til kretsen til høyre?
- **Spm 7:** Anta at kondensatoren er helt utladet før batteriet kobles inn ved $t=0\text{s}$. Hva er ligningene for $v_c(t)$, $i_c(t)$ og $v_R(t)$ når $t>0$?
- **Spm 8:** Hva er verdien til v_c etter 20ms ?
- **Spm 9:** Hvor mye ladning er på kondensatoren etter $t=2\tau$?
- **Spm 10:** Hvor stor er ladningen når kondensatoren er helt oppladet?

