IN1150 – Logiske metoder / høsten 2021 / oppgaver til kapittel 7

Oppgave 7.1. La følgende relasjoner være definert fra S til T, der $S = \{1, 2, 3\}$ og $T = \{a, b, c, d\}$. For hver relasjon, avgjør om den er en funksjon. Dersom den er en funksjon, avgjør om den er injektiv, surjektiv, begge deler eller ingen av delene.

(a) $g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle\}$
(b) $h = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 3, d\rangle\}$
(c) $i = \{\langle 2, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}$
(d) $j = \{\langle 3, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\ \langle 1, d\rangle\}$

Oppgave 7.2. La $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ og $C = \{a, b, c\}$. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være definert ved følgende:

$$f = \{\langle 1, \spadesuit\rangle, \langle 2, \heartsuit\rangle, \langle 3, \heartsuit\rangle\}$$

$$g = \{\langle \spadesuit, c\rangle, \langle \heartsuit, a\rangle, \langle \clubsuit, b\rangle\}$$

Vi definerer $h : A \to C$ til å være sammensetningen av f og g, altså $h(x) = g(f(x))$.

(a) Definer h som en mengde av tupler
(b) Hva er bildemengden til h, altså $h[A]$?

Oppgave 7.3. La $A \subseteq B$, og la $f : A \to B$ være definert ved $f(x) = id_A(x)$. (Husk at id_A er identitetsfunksjonen på A, det vil si at $id_A(x) = x$ for alle $x \in A$.)

(a) Er f en *operasjon*? Forklar.

Fordi f er en funksjon, er den også en relasjon, og dermed kan vi undersøke hvilke egenskaper den har. Vi antar i de neste oppgavene at $A = B$.

(b) Er f en symmetrisk relasjon? Forklar.
(c) Er f en partiell ordning på A? Vis hvorfor eller hvorfor ikke.

Oppgave 7.4. Vi lar $\mathcal{U}$ være mengden av alle utsagnslogiske formler (se side 22). Vi definerer funksjonen $Z : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ ved

$$Z(F, G) = (F \land G)$$

Merk at vi ser på $(F \land G)$ rent *syntaktisk*, og vi ser altså ikke på tolkningen av formelen.

(a) Er Z injektiv? Forklar.
(b) Hva er bildemengden til Z?
(c) Er Z surjektiv? Forklar.

Hint: Vi lar altså F og G kunne være *hvilke som helst utsagnslogiske formler*. For eksempel kan vi ha at $F = \neg(P \land Q)$ og $G = (P \to Q)$. Da får vi:

$$Z(\neg(P \land Q), (P \to Q)) = (\neg(P \land Q) \land (P \to Q))$$

Vi kan også ha:

$$Z((P \lor Q), \neg Q) = ((P \lor Q) \land \neg Q) \quad \text{og} \quad Z(\neg\neg\neg M, (P \land P)) = (\neg\neg\neg M \land (P \land P))$$

Vi ser altså bare på symbolene i formlen (syntaksen) og bryr oss *ikke* om sannhetsverdien og tolkningen (semantikken).