IN1150 – Logiske metoder / høsten 2021 / oppgaver til kapittel 8

Oppgave 8.1. Regn ut følgende mengder.

(a) $\mathcal{P}(\{2, a\})$
(b) $\{\emptyset, 2\} \cup \mathcal{P}(\{1\})$
(c) $\mathcal{P}(\{\emptyset, 4\})$
(d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{57\}))$

Oppgave 8.2. I denne oppgaven skal vi bevise en av De Morgans lover, nemlig at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B. Det gjør vi ved å først vise at $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, så vise $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Vi skal ikke bruke Venn-diagrammer eller andre illustrasjoner i dette beviset, men derimot ord, symboler og setninger. Det holder med korte forklaringer, så lenge man får med essensen i beviset.

(a) Anta at x er et vilkårlig element i $\overline{A \cup B}$. Vis at x må være et element i $\overline{A} \cap \overline{B}$.
(b) Anta at x være et vilkårlig element i $\overline{A} \cap \overline{B}$. Vis at x er et element i $\overline{A \cup B}$.
(c) Bruk resultatene i (a) og (b) til å konkludere med at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B.

Oppgave 8.3. La $\mathcal{H}$ være mengden av alle positive halv-tall. Vi har altså at

$$\mathcal{H} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\}.$$

Vis at $\mathcal{H}$ har samme kardinalitet som de naturlig tallene, altså at $|\mathcal{H}| = |\mathbb{N}|$.

Oppgave 8.4.

Husk at en multimengde $[a_0, a_1, ..., a_n]$ er en samling objekter der rekkefølgen, men ikke antall forekomster av hvert element, ignoreres. Vi har altså at $[1, 2, 2] \neq [1, 2]$. Vi sier at **kardinaliteten** til en multimengde er antall elementer i den. Hver multimengde M gir opphav til en mengde $F(M)$ av alle tupler på formen $\langle x, n \rangle$, der x angir et element i M, og n angir hvor mange ganger x forekommer i M. For eksempel har vi at $F([a, a, b, c, c, c]) = \{\, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 3 \rangle \,\}$. Generelt har vi at dersom et element x forekommer fem ganger i multimengden M, vil tuppelet $\langle x, 5 \rangle$ være med i $F(M)$.

(a) Hva blir $F([0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 5, 5])$?
(b) La M være en multimengde. Hvilken mengde har størst kardinalitet av M og $F(M)$? Gi en kort begrunnelse.
(c) Er $F(M)$ en funksjon? Forklar. Vi lurer altså *ikke* på om F er en funksjon, men på om $F(M)$ er en funksjon, altså det elementet som funksjonen F returnerer for argumentet M.