IN1150 – Logiske metoder / høsten 2021 / oppgaver til kapittel 11

Oppgave 11.1. La f være funksjonen på naturlige tall definert ved $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 9$. Vi skal bevise ved matematisk induksjon at $f(n) = 9 \cdot n$ er sant for alle naturlige tall n. *Påstanden* vi skal bevise at er sann for alle naturlige tall er altså: «$f(n) = 9 \cdot n$».

(a) Bevis basissteget, det vil si at påstanden holder for $n = 0$.

Induksjonssteget går som følger: Anta at påstanden holder for et naturlig tall n, det vil si at $f(n) = 9 \cdot n$. Dette er induksjonshypotesen.

(b) Forklar kort hva induksjonshypotesen er.
(c) Bruk induksjonshypotesen til å vise at påstanden også holder for $n + 1$. Konkludér og si hva du har bevist.

Oppgave 11.2. Bevis ved matematisk induksjon at påstanden «tallet $n!$ er delelig på 3» er sann for alle naturlige tall n større enn eller lik 3. Sørg for at du skriver beviset på en oversiktlig måte og at alle delene er på plass.

Noen kommentarer: Det at «m er delelig på n» betyr at det finnes et heltall q slik at $m = q \cdot n$. For eksempel er 12 delelig på 3 fordi det finnes et heltall q, nemlig 4, slik at $12 = q \cdot 3$. Merk også at det er mulig, og nokså enkelt, å vise denne påstanden *uten* matematisk induksjon. Denne opppgaven handler derimot om *formen* på et bevis ved matematisk induksjon.

Oppgave 11.3. Vis at $0 + 2 + 4 + 6 + ... + 2 \cdot n = n \cdot (n + 1)$ er sant for alle naturlige tall ved å bruke matematisk induksjon. Sørg for at du skriver beviset på en oversiktlig måte og at alle delene er på plass.

Oppgave 11.4. Hva er feil i følgende ugyldige «bevis»? (Det kan være flere feil, men det er hovedsaklig én feil i hvert «bevis». Merk at dette mest har å gjøre med *formen* på argumentet. Feilen i (a) er for eksempel ikke at påstanden som «bevises» er usann.)

(a) *Vi skal vise at alle naturlige tall er større enn seg selv. Induksjonshypotesen er at n er større enn seg selv, det vil si at $n > n$, for et naturlig tall n. Vi må vise at påstanden holder for $n + 1$, det vil si at $n + 1$ er større enn seg selv. Induksjonshypotesen gir at $n > n$. Ved å plusse med én på begge sider får vi at $n + 1 > n + 1$, det vil si at $n + 1$ er større enn seg selv. Ved matematisk induksjon kan vi konkludere med at alle naturlige tall er større enn seg selv.*
(b) *Vi beviser ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er* ***mye mindre*** *enn én million. Basissteget går slik: Tallet 0 er klart* ***mye mindre*** *enn én million. Induksjonssteget går slik: Anta at påstanden holder for n. Vi skal vise at påstanden også holder for $n + 1$. Siden n er* ***mye mindre*** *enn én million, må definitivt også $n + 1$ være det, fordi $n + 1$ bare er bitte litt større enn n. Vi har altså vist ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er* ***mye mindre*** *enn én million.*