IN1150 – Logiske metoder / høsten 2021 / oppgaver til kapittel 15

Oppgave 15.1. La et førsteordens språk med signaturen $\langle\, a, b\,;\, f\,;\, P, R\,\rangle$ være gitt, der f og P har aritet én og R har aritet to. La $\mathcal{M}$ være en modell for dette språket med domene $\{1, 2\}$ der vi tolker a som 1, b som 2, f som $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$, P som $\{1\}$ og R som $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$. Avgjør om modellen gjør følgende formler sanne eller ikke.

(a) $(P(a) \land R(f(a), b))$
(b) $(P(b) \to R(a, b))$
(c) $\exists x(\neg P(x) \land R(a, x))$
(d) $\forall x R(x, f(a))$
(e) $\forall x(P(x) \lor P(f(x)))$
(f) $\exists x \forall y R(x, y)$

Oppgave 15.2. For hver formel nedenfor, avgjør om formelen er *gyldig*, *oppfyllbar*, *falsifiserbar* og/eller *kontradiktorisk*. Du trenger ikke å begrunne svaret. Du kan anta at signaturen er $\langle\, a\,;\,;\, P, Q, R\,\rangle$.

(a) $(\exists x(\neg Px \land \neg Qx) \to \exists x \neg(Px \lor Qx))$
(b) $\exists x(Px \lor Qxa)$
(c) $(\forall x Rxa \land \exists x \neg Rxa)$
(d) $(\neg \exists x Px \to \forall x Px)$

Oppgave 15.3. Gitt domenet $\{1, 2, 3\}$, spesifisér en tolkning av relasjonssymbolene P og Q som gjør følgende formler sanne samtidig, det vil si spesifisér nøyaktig én modell som gjør alle fire formlene sanne.

(i) $\forall x \exists y(Pxy \land Qxy)$ (ii) $\neg \exists y \forall x Qxy$

(iii) $\forall x \forall y(Pxy \to \neg Pyx)$ (iv) $(\forall x Qxx \land \neg \forall x \forall y Qxy)$

Oppgave 15.4. Bevis at følgende formel er gyldig:

$$(\forall x(Rxa \land Rax) \to \exists y Ryb)$$