IN1150 – Logiske metoder / høsten 2021 / oppgaver til kapittel 17

Oppgave 17.1.

La M være mengden $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. For hver av mengdene i (a) til (e), avgjør om mengden er en partisjon av M eller ikke. Dersom mengden ikke er en partisjon av M, forklar kort hvorfor ikke.

(a) $\{\{2, 4\}, \{3, 5\}, \{0, 1\}\}$
(b) $\{\{0, 2, 4\}, \{1, 3\}\}$
(c) $\{\{0, 1, 2\}, \{4, 3\}, \emptyset\}$
(d) $\{\{4, 3\}, \{2, 1\}, \{0, 3\}\}$
(e) $\{\{0\}, \{1, 3, 1\}, \{2\}, \{4\}\}$
(f) Er noen av partisjonene i (a) til (e) forfininger av noen andre? Hvis ja, hvilke partisjoner er det? Hvis nei, forklar kort hvorfor ikke.

Oppgave 17.2. La $\oplus$ være relasjonen på heltallene $\mathbb{Z}$ slik at $a \oplus b$ dersom a og b har samme fortegn. Altså vil $a \oplus b$ dersom $a \geqslant 0$ **og** $b \geqslant 0$, eller dersom $a < 0$ **og** $b < 0$. For eksempel har vi at $-2 \oplus -3$, men ikke $2 \oplus -3$.

(a) Vis at relasjonen $\oplus$ er en ekvivalensrelasjon, det vil si at relasjonen er refleksiv, symmetrisk og transitiv.
(b) Hvor mange ekvivalensklasser har heltallene $\mathbb{Z}$ under relasjonen $\oplus$? Hvordan ser disse ekvivalensklassene ut?

(Dersom du bruker LaTeX, får du $\oplus$ ved å skrive `\oplus`.)

Oppgave 17.3. La M være mengden $\{a, b, c, d\}$.

(a) Hvor mange partisjoner P av M finnes det slik at $|P| = 3$? Det vil si, hvor mange partisjoner av M har nøyaktig tre elementer? Hint: Lag en liste over alle partisjonene.
(b) La $\gtrless$ være relasjonen på partisjoner av M slik at $P \gtrless Q$ dersom $|P| = |Q|$. Det vil si, dersom P og Q er partisjoner av M og $|P| = |Q|$, så vil $P \gtrless Q$. Bevis at $\gtrless$ er en ekvivalensrelasjon.

(Dersom du bruker LaTeX, får du $\gtrless$ ved å skrive `\gtrless`.)

Oppgave 17.4. La M og $\gtrless$ være definert som i forrige oppgave.

(a) Hva er ekvivalensklassen til $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$?
(b) Hvor mange forskjellige ekvivalensklasser finnes det for ekvivivalensrelasjonen $\gtrless$? Hva er det som skiller én ekvivalensklasse fra en annen?