IN1150 – Logiske metoder / høsten 2021 / oppgaver til kapittel 20

Oppgave 20.1.

(a) Angi inversen til relasjonen $\{\langle 1,3\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 1,6\rangle\}$ på naturlige tall.
(b) Angi inversen til barnebarnrelasjonen på mengden av alle mennesker. (Person a er *barnebarnet* til person c dersom det finnes en person b slik at a er barnet til b og b er barnet til c.)
(c) Angi inversen til relasjonen som er slik at x er relatert til y hvis x ser på y, der x og y er mennesker.
(d) La $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være konstantfunksjonen som alltid gir 4, det vil si at $k(x) = 4$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Forklar hvorfor k ikke har en invers funksjon.

Oppgave 20.2. For hver av følgende grupper, angi identitetselementet og hva som er inversen til et element x.

(a) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
(b) $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$
(Her er $\cdot$ den vanlige multiplikasjonsoperasjonen.)

Hvorfor er ikke følgende par av mengder og operasjoner grupper?

(c) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$
(d) $\langle \{s \mid s \text{ er en streng over alfabetet } \{0,1\}\}, \cdot \rangle$
(Her er $\cdot$ konkateneringsoperasjonen, det vil si $s \cdot t = st$.)

Oppgave 20.3.

(a) For $x \in \mathbb{R}$, la $\lfloor x \rfloor$ være lik x rundet av nedover til nærmeste heltall. For eksempel vil $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Vis at denne funksjonen er idempotent.
(b) Vis at mengdedifferanseoperasjonen ikke er assosiativ.
(c) Kan vi ha en gruppe $\langle G, * \rangle$ slik at G har null elementer? Hvorfor / Hvorfor ikke? Forklar.
(d) Kan vi ha en gruppe $\langle G, * \rangle$ slik at G har ett element? Hvorfor / Hvorfor ikke? Forklar.

Oppgave 20.4. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$. Vi har at sammensetningen av g og f er gitt ved ved $h : A \to C$ og $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

(a) Anta f og g er injektive. Bevis at h også må være injektiv.
(b) Anta f og g er surjektive. Bevis at h også må være surjektiv.
(c) Anta f og g er både injektive og surjektive. Vis at h har en inversfunksjon.