IN1150 – Logiske metoder: **Innleveringsoppgave 10**
Frist: Fredag 26.mars 2021, kl. 23.59

Oppgaver til kapittel 19

Oppgave 1.

(a) Åge Rant har ni sjongleringsballer som alle har forskjellige farger. Han har fire forskjellige skuffer å legge ballene i. På hvor mange forskjellige måter kan han legge ballene i skuffene? Vi er her kun opptatt av hvilke baller som havner i hvilke skuffer.
(b) Han velger å kjøpe ni nye sjongleringsballer som alle er hvite, og det er umulig å se forskjell på dem. På hvor mange forskjellige måter kan han legge de nye ballene i de fire skuffene sine? Vi er her altså kun opptatt av hvor mange baller som havner i hver skuff.

Oppgave 2. La T være mengden $\{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Hvor mange delmengder av T med nøyaktig ett element finnes det? Hvor mange delemgder av T med nøyaktig to elementer finnes det?
(b) Hvor mange delmengder av T finnes det med nøyaktig tre og fire elementer, henholdsvis? Hvor mange delmengder av T finnes det totalt?
(c) Forklar hvorfor vi generelt har at

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Hint: Forsøk først å se hvorfor det er slik når $n = 4$ eller $n = 3$.

Oppgave 3. Anta mengden S har n elementer, og at $|S| = |T|$. Hvor mange funksjoner $f : S \to T$ finnes det slik at f har en invers? Forklar hvorfor.

Oppgave 4. Tulleland har et romskip som skal reise til Mars med 101 passasjerer. Disse passasjerene skal fordeles på romskipets tre unike kabiner. Hver kabin må ha mellom én og femti passasjerer. På hvor mange måter kan passasjerene fordeles i de tre kabinene?

Noen kommentarer: Vi ser altså ikke forskjell på passasjerene her; vi er kun interessert i antallet passasjerer i hver av de tre kabinene. Det kan for eksempel være 50 passasjerer i den første kabinen, 40 passasjerer i den andre kabinen, og 11 passasjerer i den tredje kabinen. En annen måte er at det er 11 passasjerer i den første kabinen, 40 passasjerer i den andre kabinen, og 50 passasjerer i den tredje kabinen.

Hint: Hvor mange fordelinger finnes med 50 passasjerer i den første kabinen? Hvor mange fordelinger finnes med 49 passasjerer i den første kabinen?

Oppgaver til kapittel 20

Oppgave 5.

(a) Angi inversen til relasjonen $\{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 1, 6 \rangle \}$ på naturlige tall.
(b) Angi inversen til barnebarnrelasjonen på mengden av alle mennesker.
(c) Angi inversen til relasjonen som er slik at x er relatert til y hvis x ser på y, der x og y er mennesker.
(d) La $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være konstantfunksjonen som alltid gir 4, det vil si at $k(x) = 4$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Forklar hvorfor k ikke har en invers.

Oppgave 6. For hver av følgende grupper, angi identitetselementet og hva som er inversen til et element x.

(a) $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$
(b) $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$
(Her er $\cdot$ den vanlige multiplikasjonsoperasjonen.)

Hvorfor er ikke følgende par av mengder og operasjoner grupper?

(c) $\langle \mathbb{N}, + \rangle$
(d) $\langle \{s \mid s \text{ er en streng over alfabetet } \{\epsilon, 0, 1\}\}, \cdot \rangle$
(Her er $\cdot$ konkateneringsoperasjonen, det vil si $s \cdot t = st$.)

Oppgave 7.

(a) For $x \in \mathbb{R}$, la $\lfloor x \rfloor$ være lik x rundet av nedover til nærmeste heltall. For eksempel vil $\lfloor \pi \rfloor = 3$. Vis at denne funksjonen er idempotent.
(b) Vis at mengdedifferanseoperasjonen ikke er assosiativ.
(c) Kan en gruppe ha null elementer? Hvorfor / Hvorfor ikke? Forklar.
(d) Kan en gruppe ha nøyaktig ett element? Hvorfor / Hvorfor ikke? Forklar.

Oppgave 8. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$. Vi har at sammensetningen av g og f er gitt ved ved $h : A \to C$ og $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

(a) Anta f og g er injektive. Vis at h også må være injektiv.
(b) Anta f og g er surjektive. Vis at h også må være surjektiv.
(c) Anta f og g er både injektive og surjektive. Vis at h har en inversfunksjon.