IN1150 – Logiske metoder: **Innleveringsoppgave 11**
Frist: Fredag 16. april 2021, kl. 23.59

Oppgaver til kapittel 21

Oppgave 1. Anta at vi har en enkel graf G med nodene $V = \{a, b, c, d, e\}$ og kantene $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{e, c\}, \{e, b\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$.

(a) Tegn denne grafen.
(b) Er dette en komplett graf? Hvis ja, hvorfor? Hvis nei, hva mangler?
(c) Hva er nodene og kantene til $\overline{G}$, komplementet til G?

Oppgave 2.

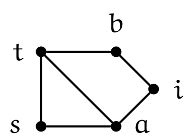
(a) Finn en *rettet* graf med nøyaktig fire noder og tre kanter, og definer denne presist som en mengde noder og kanter. Tegn deretter grafen.
(b) Anta at en enkel, rettet graf har nodene $\{a, b, c\}$. Hvor mange forskjellige rettede grafer kan denne gi opphav til? Du trenger kun å oppgi tallet. (Vi tillater altså ikke løkker eller parallelle kanter, men to noder kan ha to kanter mellom seg dersom de har forskjellig retning.)
(c) Hva er svaret på (b) dersom vi ikke tillater at to noder har to kanter mellom seg?

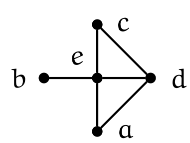
Oppgave 3.

(a) Hva er summen av gradene i en graf med fem noder og tre kanter?
(b) Hva er summen av gradene i en graf med tre noder og fem kanter?
(c) Hva er summen av gradene i K_4, den komplette grafen med fire noder?
(d) Hva er summen av gradene til $\overline{K_5}$, komplementet til K_5?

Oppgave 4. Anta at vi har en enkel graf G med nodene $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og kantene $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$. For hver av grafene under, avgjør om denne grafen er isomorf med G. Hvis den er det, gi en bijektiv funksjon f fra nodene i G til nodene i grafen. Hvis ikke, forklar hvorfor de ikke er isomorfe.

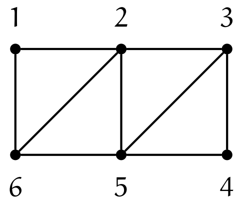
(a) Grafen slik at $V = \{a, b, c, d\}$ og $E = \{\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{b, c\}\}$.
(b) Grafen slik at $V = \{e, f, s, o, i\}$ og $E = \{\{o, s\}, \{f, s\}, \{i, f\}, \{e, i\}, \{o, e\}, \{o, f\}\}$.

(c)


(d)


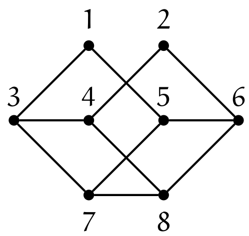
Oppgaver til kapittel 22

Oppgave 5. Se på følgende graf.



(a) Har denne grafen en *eulerkrets* eller en *eulervei*? Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.
(b) Har denne grafen en *hamiltonsti* eller en *hamiltonsykel*? Hvis ja, gi minst ett eksempel.

Oppgave 6. Se på følgende graf.



(a) Har denne grafen en *eulerkrets* eller en *eulervei*? Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.
(b) Har denne grafen en *hamiltonsti* eller en *hamiltonsykel*? Hvis ja, gi minst ett eksempel.

Oppgave 7. La $u \leftrightsquigarrow v$ bety at det finnes en sti fra u til v (for en gitt urettet graf). Bevis at $\leftrightsquigarrow$ er en ekvivalensrelasjon, det vil si at den er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Forklar kort hvordan ekvivalensklassene ser ut.

(Dersom du bruker LaTeX, får du $\leftrightsquigarrow$ ved å skrive `\leftrightsquigarrow`.)

Oppgave 8.

(a) Bevis at hvis det finnes nøyaktig én sti mellom alle par av noder i en graf, så er grafen et tre.
(b) Bevis at hvis en graf er et tre, så finnes det nøyaktig én sti mellom alle par av noder i grafen.
(c) Bevis at alle komplette grafer med minst tre noder har en hamiltonsykel.