IN1150 – Logiske metoder: **Innleveringsoppgave 4**
Frist: Fredag 12. februar 2021, kl. 23.59

Oppgaver til kapittel 7

Oppgave 1. La følgende relasjoner være definert fra S til T, der $S = \{1, 2, 3\}$ og $T = \{a, b, c, d\}$. For hver relasjon, avgjør om den er en funksjon. Dersom den er en funksjon, avgjør om den er injektiv og/eller surjektiv.

(a) $g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle\}$
(b) $h = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 3, d\rangle\}$
(c) $i = \{\langle 2, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}$
(d) $j = \{\langle 3, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\ \langle 1, d\rangle\}$

Oppgave 2. La $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ og $C = \{a, b, c\}$. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være definert ved følgende:

$$f = \{\langle 1, \spadesuit\rangle, \langle 2, \heartsuit\rangle, \langle 3, \heartsuit\rangle\}$$
$$g = \{\langle \spadesuit, c\rangle, \langle \heartsuit, a\rangle, \langle \clubsuit, b\rangle\}$$

Vi definerer $h : A \to C$ til å være sammensetningen av f og g, altså $h(x) = g(f(x))$.

(a) Definer h som en mengde av tupler
(b) Hva er bildemengden til h, altså $h[A]$?

Oppgave 3. La $A \subseteq B$, og la $f : A \to B$ være definert ved $f(x) = id_A(x)$. (Husk at id_A er identitetsfunksjonen på A, det vil si at $id_A(x) = x$ for alle $x \in A$.)

(a) Er f en *operasjon*? Forklar.

Fordi f er en funksjon, er den også en relasjon, og dermed kan vi undersøke hvilke egenskaper den har.

(b) Er f en symmetrisk relasjon? Forklar.
(c) Anta at $A = B$. Er f en partiell ordning på A? Forklar.

Oppgave 4. Vi lar $\mathcal{U}$ være mengden av alle utsagnslogiske formler (se side 22). Vi definerer funksjonen $Z : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ ved

$$Z(F, G) = (F \land G)$$

Merk at vi ser på $(F \land G)$ rent *syntaktisk*, og vi ser altså ikke på tolkningen av formelen.

(a) Er Z injektiv? Forklar.
(b) Hva er bildemengden til Z?
(c) Er Z surjektiv? Forklar.

Oppgaver til kapittel 8

Oppgave 5. Regn ut følgende mengder.

(a) $\mathcal{P}(\{2, a\})$
(b) $\mathcal{P}(\{1\}) \cup \{\emptyset, 2\}$
(c) $\mathcal{P}(\{\emptyset, 4\})$
(d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{57\}))$

Oppgave 6. I denne oppgaven skal vi bevise en av De Morgans lover, nemlig at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B. Det gjør vi ved å først vise at $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, så vise $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Vi skal ikke bruke Venn-diagrammer eller andre illustrasjoner i dette beviset, men derimot ord og setninger. Det holder med korte forklaringer, så lenge man får med essensen i beviset.

(a) Anta at x er et vilkårlig element i $\overline{A \cup B}$. Forklar hvorfor x må være et element i $\overline{A} \cap \overline{B}$.
(b) Anta at x være et vilkårlig element i $\overline{A} \cap \overline{B}$. Vis at x er et element i $\overline{A \cup B}$.
(c) Bruk resultatene i (a) og (b) til å konkludere med at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B.

Oppgave 7. La $\mathcal{H}$ være mengden av alle positive halv-tall. Altså er $\mathcal{H} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, ...\}$. Vis at $\mathcal{H}$ har samme kardinalitet som de naturlig tallene, altså at $|\mathcal{H}| = |\mathbb{N}|$.

Oppgave 8. Husk at en multimengde $[a_0, a_1, ..., a_n]$ er en samling objekter der rekkefølgen, men ikke antall forekomster av hvert element, ignoreres. Vi har altså at $[1, 2, 2] \neq [1, 2]$. Vi sier at **kardinaliteten** til en multimengde er antall elementer i den. Hver multimengde M gir opphav til en mengde $F(M)$ av alle tupler på formen $\langle x, n \rangle$, der x angir et element i M, og n angir hvor mange ganger x forekommer i M. For eksempel har vi at $F([a, a, b, c, c, c]) = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 3 \rangle \}$. Generelt har vi at dersom et element x forekommer fem ganger i multimengden M, vil tuppelet $\langle x, 5 \rangle$ være med i $F(M)$.

(a) Hva blir $F([0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 5, 5])$?
(b) La M være en multimengde. Hvilken mengde har størst kardinalitet av M og $F(M)$? Gi en kort begrunnelse.
(c) Er $F(M)$ en funksjon? Forklar.