IN1150 – Logiske metoder: **Innleveringsoppgave 5**
Frist: Fredag 19. februar 2021, kl. 23.59

Oppgaver til kapittel 9

Oppgave 1. La $U = \{a, b, c, d\}$, og la R være en relasjonen $\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, d\rangle\}$ på U.

(a) Hva er den refleksive tillukningen av R?
(b) Hva er den symmetriske tillukningen av R?
(c) Hva er den transitive tillukningen av R?
(d) Hva er den symmetriske og transitive tillukningen av R?

Oppgave 2. La $A = \{1, 2, 3\}$.

(a) Kan man ta den *irrefleksive* tillukningen av relasjonen $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ på A? Hvis ja, hva er den irrefleksive tillukningen? Hvis nei, forklar hvorfor ikke.
(b) Kan man ta den *irrefleksive* tillukningen av relasjonen $R = \{\langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ på A? Hvis ja, hva er den irrefleksive tillukningen? Hvis nei, forklar hvorfor ikke.

Oppgave 3. For hver av følgende induktive definisjoner, begynn med basismengden og konstruer de første ti elementene i mengden

(a) *Basismengde:* $\{0\}$. *Induksjonssteg:* Hvis x er med, så er $x - 1$ med.
(b) *Basismengde:* $\{1\}$. *Induksjonssteg:* Hvis x er med, så er $3 \cdot x$ med.
(c) *Basismengde:* $\{3\}$. *Induksjonssteg:* Hvis x er med, så er $3 \cdot x$ og $(3 \cdot x) + 1$ med.
(d) *Basismengde:* $\{0, 2\}$. *Induksjonssteg:* Hvis x er med, så er $x + 3$ med.

(Her er $+$, $-$ og $\cdot$ de vanlige aritmetiske operasjonene på tall: addisjon, subtraksjon og multiplikasjon.)

Oppgave 4. Finn induktive definisjoner for mengdene nedenfor. For eksempel kan mengden $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ defineres induktivt som den minste mengden A som er slik at $0 \in A$ og hvis $x \in A$, så $x + 2 \in A$. Definér mengden slik at basismengden består av maksimalt to elementer, men helst kun ett element.

(a) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \ldots\}$
(b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$
(c) $\{1, 2, 5, 7, 10, 12, 25, 27, \ldots\}$
(d) $\{a, b, ab, bb, abb, bbb, abbb, bbbb, \ldots\}$

Oppgaver til kapittel 10

Oppgave 5. Definer følgende funksjoner på $\mathbb{N}$ rekursivt. Funksjonen $f(n) = 2 \cdot n$ kan for eksempel defineres rekursivt ved at $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 2$. Regn ut de åtte første verdiene for hver funksjon.

(a) $f(n) = 8 \cdot n$
(b) $f(n) = 3 \cdot n + 1$
(c) $f(n) = 369$
(d) $f(n) = 6 \cdot n + 3$
(e) $f(n) = n^2$
(f) $f(n) = n^2 + 1$

Oppgave 6. La alfabetet $A = \{\texttt{t}, \texttt{a}, \texttt{o}\}$. La funksjonen $\mathcal{T}$ fra A^* til heltallene være definert rekursivt ved:

$$\mathcal{T}(\Lambda) = 0$$

$$\mathcal{T}(s\texttt{t}) = \mathcal{T}(s) + 1, \qquad \mathcal{T}(s\texttt{a}) = \mathcal{T}(s) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{T}(s\texttt{o}) = \mathcal{T}(s) - 1$$

der $s \in A^*$.

(a) Regn ut $\mathcal{T}(\texttt{t})$, $\mathcal{T}(\texttt{tatt})$, $\mathcal{T}(\texttt{tao})$ og $\mathcal{T}(\texttt{ottato})$
(b) Forklar kort med egne ord hva $\mathcal{T}$ gjør.

Oppgave 7. Vi definerer funksjonen b på mengden av bitstrenger (slik denne mengden er definert i Logiske metoder) slik at den bytter enhver forekomst av $\texttt{0}$ med $\texttt{1}$ og vice versa. For eksempel har vi at $b(\texttt{0}) = \texttt{1}$, $b(\texttt{110}) = \texttt{001}$ og $b(\texttt{1011100}) = \texttt{0100011}$. Gi en rekursiv definisjon av funksjonen b.

Oppgave 8. Gi en rekursiv definisjon av funksjonen $\mathcal{W}$ fra utsagnslogiske formler til naturlige tall, slik at $\mathcal{W}$ teller antall forekomster av konnektivet $\wedge$. Her er noen eksempler:

$$\mathcal{W}\big((P \wedge Q)\big) = 1 \qquad \mathcal{W}\big(((P \to Q) \vee R)\big) = 0 \qquad \mathcal{W}\big((P \wedge (Q \wedge P))\big) = 2$$