IN1150 – Logiske metoder: **Innleveringsoppgave 6**

Frist: Fredag 26. februar 2021, kl. 23.59

Oppgaver til kapittel 11

Oppgave 1. La f være funksjonen på naturlige tall definert ved $f(0) = 0$ og $f(n+1) = f(n) + 9$. Vi skal bevise ved matematisk induksjon at $f(n) = 9 \cdot n$ er sant for alle naturlige tall n. *Påstanden* vi skal bevise at er sann for alle naturlige tall er altså: «$f(n) = 9 \cdot n$».

(a) Bevis basissteget, det vil si at påstanden holder for $n = 0$.

Induksjonssteget går som følger: Anta at påstanden holder for et naturlig tall n, det vil si at $f(n) = 9 \cdot n$. Dette er induksjonshypotesen.

(b) Bruk induksjonshypotesen til å vise at påstanden også holder for $n + 1$. Konkludér og si hva du har bevist.

Oppgave 2. Bevis ved matematisk induksjon at påstanden «tallet $n!$ er delelig på 3» er sann for alle naturlige tall n større enn eller lik 3. Sørg for at du skriver beviset på en oversiktlig måte og at alle delene er på plass.

Noen kommentarer: Det at «m er delelig på n» betyr at det finnes et heltall q slik at $m = q \cdot n$. For eksempel er 12 delelig på 3 fordi det finnes et heltall q, nemlig 4, slik at $12 = q \cdot 3$. Merk også at det er mulig, og nokså enkelt, å vise denne påstanden *uten* matematisk induksjon. Denne opppgaven handler derimot om *formen* på et bevis ved matematisk induksjon.

Oppgave 3. Vis at $2 + 4 + 6 + \ldots + 2 \cdot n = n \cdot (n + 1)$ er sant for alle naturlige tall ved å bruke matematisk induksjon. Sørg for at du skriver beviset på en oversiktlig måte og at alle delene er på plass.

Oppgave 4. Hva er feil i følgende ugyldige «bevis»? (Det kan være flere feil, men det er hovedsaklig én feil i hvert «bevis». Merk at dette mest har å gjøre med *formen* på argumentet. Feilen i (a) er for eksempel ikke at påstanden som «bevises» er usann.)

(a) *Vi skal vise at alle naturlige tall er større enn seg selv. Induksjonshypotesen er at* n *er større enn seg selv, det vil si at* $n > n$*, for et naturlig tall* n*. Vi må vise at påstanden holder for* $n + 1$*, det vil si at* $n + 1$ *er større enn seg selv. Induksjonshypotesen gir at* $n > n$*. Ved å plusse med én på begge sider får vi at* $n + 1 > n + 1$*, det vil si at* $n + 1$ *er større enn seg selv. Ved matematisk induksjon kan vi konkludere med at alle naturlige tall er større enn seg selv.*

(b) *Vi beviser ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er* ***mye mindre*** *enn én million. Basissteget går slik: Tallet* 0 *er klart* ***mye mindre*** *enn én million. Induksjonssteget går slik: Anta at påstanden holder for* n*. Vi skal vise at påstanden også holder for* $n + 1$*. Siden* n *er* ***mye mindre*** *enn én million, må definitivt også* $n + 1$ *være det, fordi* $n + 1$ *bare er bitte litt større enn* n*. Vi har altså vist ved matematisk induksjon at alle naturlige tall er* ***mye mindre*** *enn én million.*

Oppgaver til kapittel 12

Oppgave 5. La S være språket over alfabetet $\{\mathtt{b}, \mathtt{d}\}$ som er induktivt definert slik at $\Lambda \in S$ og hvis $x \in S$, så $\mathtt{d}x\mathtt{b} \in S$. Bevis ved strukturell induksjon at for alle $x \in S$ så er det slik at antall forekomster av $\mathtt{b}$ er lik antall forekomster av $\mathtt{d}$.

Oppgave 6. Vi vil i denne oppgaven se på en funksjon som regner ut «tverrsummen» av en bitstreng, det vil si som returnerer antall forekomster av $\mathtt{1}$ i en bitstreng. For eksempel har vi at $f(\mathtt{110011}) = 4$ og $f(\mathtt{000}) = 0$. Vi velger å definere f rekursivt ved å si at $f(\mathtt{0}) = 0$, $f(\mathtt{1}) = 1$, $f(s\mathtt{0}) = f(s)$ og $f(s\mathtt{1}) = f(s) + 1$, for en bitstreng s. (Legg merke til at det er forskjell på *tegnet* $\mathtt{0}$ og *tallet* 0, men du kan godt bruke det samme symbolet i din besvarelse. Det samme for $\mathtt{1}$ og 1.) Bevis ved strukturell induksjon at f regner ut tverrsummen til en bitstreng, det vil si at den fungerer som den skal.

Oppgave 7. La funksjonen $\textsc{flip}$ på mengden av alle utsagnslogiske formler være definert på følgende måte, hvor P står for en vilkårlig utsagnsvariabel og F og G står for vilkårlige utsagnslogiske formler:

$$
\begin{aligned}
\textsc{flip}(P) &= P \\
\textsc{flip}(\neg F) &= \neg\textsc{flip}(F) \\
\textsc{flip}((F \land G)) &= (\textsc{flip}(G) \land \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \lor G)) &= (\textsc{flip}(G) \lor \textsc{flip}(F)) \\
\textsc{flip}((F \to G)) &= (\textsc{flip}(G) \to \textsc{flip}(F))
\end{aligned}
$$

Regn ut $\textsc{flip}(P \lor \neg Q)$ og $\textsc{flip}(P \to (Q \to R))$. Vis alle stegene i utregningen.

Oppgave 8. Bruk definisjonen av $\textsc{flip}$ i forrige oppgave. Bevis ved strukturell induksjon at $\textsc{flip}(\textsc{flip}(F))$ er ekvivalent med F, for alle utsagnslogiske formler F.