IN1150 – Logiske metoder: **Innleveringsoppgave 7**
Frist: Fredag 5. mars 2021, kl. 23.59

Oppgaver til kapittel 13

Oppgave 1. La en signatur være $\langle\, a, b\,;\, f, g\,;\, P, R, Q\,\rangle$, der ariteten til f og P er én, ariteten til g og R er to, og ariteten til Q er null. Avgjør om følgende uttrykk er førsteordens *termer* eller ikke. Her bruker vi parenteser slik som det er definert i definisjonen av førsteordens termer; senere vil vi ha lov til å fjerne dem (som for eksempel når vi skriver fx i stedet for $f(x)$).

(a) $f(x$
(b) $h(a)$
(c) $P(x)$
(d) (a)
(e) $f(f(g(a, f(a))))$
(f) $f(a, b)$
(g) $g(x, a)$
(h) a
(i) $g(g(g(a, b), b), b)$
(j) $g(f(a), y)$
(k) Q
(l) $\forall x f(x)$

Oppgave 2. La signaturen være den samme som i forrige oppgave. Avgjør om følgende utrykk er førsteordens *formler* eller ikke. Her bruker vi parenteser slik som det er definert i definisjonen av førsteordens formler; i andre kontekster vil vi ha lov til å fjerne dem, som for eksempel når vi skriver Px i stedet for $P(x)$.

(a) $P(x)\forall x R(x, b)$
(b) $R(f(a), x)$
(c) $\exists x \forall y (R(x, y) \land P(a))$
(d) $((P \to Q) \land (Q \to P))$
(e) $\forall x$
(f) $g(x, a)$
(g) $\neg x \exists y (P(a) \to R(x, y))$
(h) $(P(a))$
(i) $\forall x \to (P(x) \lor R(x, a))$
(j) Q
(k) $P(a)$
(l) $(\neg(\neg(\neg(Pa))))$
(m) $g(f(a), y)$
(n) $(P(b) \to \forall x R(x, a))$
(o) $\forall x P(y)$
(p) $(P(a) \land Q)$

Oppgave 3. Formlene under har ingen parenteser, men på grunn av presedensreglene kan vi tolke dem presist. Sett alle parenteser på rett plass slik at formlene og termene er korrekte. Alle formlene og termene skal være i tråd med de induktivt definerte mengdene av førsteordens formler og termer. Ingenting annet skal endres, og betydning ikke forandres.

(a) $Rxy \to Pa \land \neg\forall x Px$
(b) $\exists x \forall y \neg Px \lor Rxy$

Oppgave 4. Vi har lov til å droppe parenteser når vi skriver termer, men det må i så fall være helt entydig hva termene betyr. For eksempel skriver vi ofte ffa i stedet for $f(f(a))$. Det er nokså uproblematisk. Men, se på følgende term. Den kan tolkes på flere forskjellige måter. Forklar!

$$fgaa$$

Oppgaver til kapittel 14

Oppgave 5. Anta a, b og c er konstantsymboler som tolkes som Arne, Bjarne og Carl. Anta vi har relasjonssymbolene P, U, S og F der Px tolkes som *x er populær*, Ux tolkes som *x er usikker*, Sxy tolkes som *x er sjalu på y* og Fxy tolkes som *x er forelsket i y*. Finn førsteordens formler som representerer følgende utsagn:

(a) Bjarne er usikker.
(b) Carl er sjalu på noen.
(c) Carl er forelsket i Arne, men ikke i Bjarne.
(d) Alle er forelsket i noen.
(e) Arne er sjalu på noen som både er usikker og populær.
(f) Ingen er forelsket i Carl.
(g) Arne er sjalu på alle, men Bjarne er ikke det.
(h) De som er forelsket i seg selv er populære, men usikre.
(i) Alle er sjalu på de som er forelsket i noen som de selv er forelsket i.

Oppgave 6. Anta at konstantsymbolene a, b og c tolkes som Astrid, Bodil og Camilla. Anta at K, O, S og F er relasjonssymboler slik at Kx tolkes som x *har et stort kontor*, Ox tolkes som x *jobber overtid*, Sxy tolkes som x *er sjefen til* y og Fxy tolkes som x *er flinkere enn* y. Finn *gode* og *naturlige* norske setninger for følgende førsteordens formler.

(a) $(Kb \land \neg Oa)$
(b) $\forall x Ox$
(c) $\exists x(Ox \land Sxc)$
(d) $\forall x(Fbx \to \neg Kx)$
(e) $\forall x \exists y Fyx$
(f) $(\forall x Scx \land \exists y Ky)$
(g) $\exists x \forall y(Oy \to Fxy)$
(h) $\forall x \forall y(Sxy \to \exists z Szx)$

Oppgave 7. Avgjør om følgende formler er lukkede eller ikke. Hvis de ikke er det, oppgi de frie variablene. Kun a og b er konstantsymboler.

(a) $\forall x(Px \land \neg Px)$
(b) $\forall x Pa$
(c) $\exists x \exists y Px \lor Py$
(d) $\forall x \exists y(Rxy \to \neg \exists z Ryb)$
(e) $\forall x(Py \land \neg Px)$
(f) $(\forall x Px \land Qx)$
(g) $Pa \to Px$
(h) $\forall x \forall y \forall x(Rxy \to Ryz)$

Oppgave 8. Kan vi uttrykke følgene uttrykk med førsteordens formler? Hvorfor/hvorfor ikke?

(a) Det finnes to personer som er forskere.
(b) Det finnes nøyaktig én forsker.