IN1150 – Logiske metoder: **Innleveringsoppgave 8**
Frist: Fredag 12. mars 2021, kl. 23.59

Oppgaver til kapittel 15

Oppgave 1. La et førsteordens språk med signaturen $\langle\, a, b\,;\, f\,;\, P, R\,\rangle$ være gitt, der f og P har aritet én og R har aritet to. La $\mathcal{M}$ være en modell for dette språket med domene $\{1, 2\}$ der vi tolker a som 1, b som 2, f som $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$, P som $\{1\}$ og R som $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$. Avgjør om modellen gjør følgende formler sanne eller ikke.

(a) $(P(a) \land R(f(a), b))$
(b) $(P(b) \to R(a, b))$
(c) $\exists x(\neg P(x) \land R(a, x))$
(d) $\forall x R(x, f(a))$
(e) $\forall x(P(x) \lor P(f(x)))$
(f) $\exists x \forall y R(x, y)$
(g) $\forall x \exists y(\neg P(y) \to R(x, y))$
(h) $\exists x \neg \forall y(R(x, y) \to R(y, x))$

Oppgave 2. For hver formel nedenfor, avgjør om den er gyldig, oppfyllbar, falsifiserbar eller kontradiktorisk. Oppgi alle egenskapene formelen har.

(a) $(\exists x(\neg Px \land \neg Qx) \to \exists x \neg(Px \lor Qx))$
(b) $\exists x(Px \lor Qxa)$
(c) $(\forall x Rxa \land \exists x \neg Rxa)$
(d) $(\neg \exists x Px \to \forall x Px)$

Oppgave 3. Gitt domenet $\{1, 2, 3\}$, spesifisér en tolkning av relasjonssymbolene R og P som gjør følgende formler sanne samtidig, det vil si spesifisér nøyaktig én modell som gjør alle fire formlene sanne.

(i) $\forall x \exists y(Pxy \land Rxy)$
(ii) $\neg \exists y \forall x(Pxy \land Rxy)$
(iii) $\forall x \forall y(Pxy \to \neg Pyx)$
(iv) $(\forall x Rxx \land \neg \forall x \forall y Rxy)$

Oppgave 4. Bevis at følgende formel er gyldig:

$$(\forall x(Rxa \land Rax) \to \exists y Ryb)$$

Oppgaver til kapittel 16

Oppgave 5. For hver formel nedenfor, avgjør om formelen er en logisk konsekvens av formelen $(\exists x Px \land \forall x Rxa)$ eller ikke.

(a) $\exists x Rxx$

(b) $(Pb \lor \exists x Rxb)$

(c) $(Pa \to Pa)$

(d) $(\neg \forall x Px \land \exists x Rax)$

Oppgave 6. For hver av formlene nedenfor, avgjør om $(Pa \lor \neg \exists x Rax)$ er en logisk konsekvens av formelen eller ikke.

(a) $\forall x Px$

(b) $\neg \forall x Rax$

(c) $(\exists x \neg Rax \land \exists x Px)$

(d) $(Pa \to Pa)$

Oppgave 7. For hver av formlene nedenfor, finn en tolkning av R som gjør formelen usann i en modell med domene $\{1, 2, 3\}$.

(a) $(\exists x Rxx \to \forall x Rxx)$

(b) $(\exists x \exists y Rxy \to \exists x Rxx)$

(c) $(\forall x Rxx \to \forall x \forall y Rxy)$

(d) $(\forall x \exists y Rxy \to \forall x Rxx)$

Oppgave 8. Skriv følgende formler på preneks normalform.

(a) $\forall x(Fxb \lor \forall y Py) \to \exists z Kaz$

(b) $(\exists x Rxa \land (Pb \to \forall x Rbx))$