IN1150 – Logiske metoder: **Innleveringsoppgave 9**
Frist: Fredag 19. mars 2021, kl. 23.59

Oppgaver til kapittel 17

Oppgave 1.

La M være mengden $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. For hver av mengdene i (a) til (e), avgjør om mengden er en partisjon av M eller ikke. Dersom mengden ikke er en partisjon av M, forklar kort hvorfor ikke.

(a) $\{\{2, 4\}, \{3, 5\}, \{0, 1\}\}$
(b) $\{\{0, 2, 4\}, \{1, 3\}\}$
(c) $\{\{0, 1, 2\}, \{4, 3\}, \emptyset\}$
(d) $\{\{4, 3\}, \{2, 1\}, \{0, 3\}\}$
(e) $\{\{0\}, \{1, 3, 1\}, \{2\}, \{4\}\}$
(f) Er noen av partisjonene i (a) til (e) forfininger av noen andre? Hvis ja, hvilke partisjoner er det? Hvis nei, forklar kort hvorfor ikke.

Oppgave 2. La $\oplus$ være relasjonen på heltallene $\mathbb{Z}$ slik at $a \oplus b$ dersom a og b har samme fortegn. Altså vil $a \oplus b$ dersom $a \geqslant 0$ **og** $b \geqslant 0$, eller dersom $a < 0$ **og** $b < 0$.

(a) Vis at relasjonen $\oplus$ er en ekvivalensrelasjon, det vil si at relasjonen er refleksiv, symmetrisk og transitiv.
(b) Hvor mange ekvivalensklasser har heltallene $\mathbb{Z}$ under relasjonen $\oplus$? Hvordan ser disse ekvivalensklassene ut?

(Dersom du bruker LaTeX, får du $\oplus$ ved å skrive `\oplus`.)

Oppgave 3. La M være mengden $\{a, b, c, d\}$.

(a) Hvor mange partisjoner P av M finnes det slik at $|P| = 3$? Det vil si, hvor mange partisjoner av M har nøyaktig tre elementer? Hint: Lag en liste over alle partisjonene.
(b) La $\gtrless$ være relasjonen på partisjoner av M slik at $P \gtrless Q$ dersom $|P| = |Q|$. Det vil si, dersom P og Q er partisjoner av M og $|P| = |Q|$, så vil $P \gtrless Q$. Bevis at $\gtrless$ er en ekvivalensrelasjon.

(Dersom du bruker LaTeX, får du $\gtrless$ ved å skrive `\gtrless`.)

Oppgave 4. La M og $\gtrless$ være definert som i forrige oppgave.

(a) Hva er ekvivalensklassen til $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d\}\}$?
(b) Hvor mange forskjellige ekvivalensklasser finnes det for ekvivivalensrelasjonen $\gtrless$? Hva er det som skiller én ekvivalensklasse fra en annen?

Oppgaver til kapittel 18

Oppgave 5. En gartner skal plante åtte blomster i rad etter hverandre i et blomsterbed.

(a) Dersom vi anser alle de åtte blomstene for å være forskjellige, på hvor mange mulig forskjellige måter kan gartneren plassere dem?

(b) Blant de åtte blomstene er det to roser, tre tulipaner og tre rhododendroner. Dersom vi *ikke* anser alle blomstene som forskjellige, men identifiserer blomster av samme type (slik at vi for eksempel ikke ser forskjell på to rhododendroner), på hvor mange mulig forskjellige måter kan gartneren plassere dem nå?

(c) Samtidig som gartneren prøver å vurdere alle rekkefølgene for å finne den fineste, tenker han over det morsomme navnet `rhododendron`. Dersom vi bruker bokstavene i strengen `rhododendron` og stokker dem om, hvor mange forskjellige strenger kan vi lage?

Oppgave 6. En *bitstreng* er en ikke-tom streng over alfabetet $\Sigma = \{0, 1\}$.

(a) Hvor mange forskjellige bitstrenger finnes det av lengde ti? Hva med lengde tjue?

(b) Hvor mange bitstrenger av lengde ti finnes det med *nøyaktig* tre forekomster av `0`?

(c) Hvor mange bitsrenger av lengde ti finnes det med *minst* tre forekomster av `0`?

Oppgave 7. Vi definerer en *kvantestreng* som ikke-tom streng over alfabetet $\Sigma = \{0, 1, \phi\}$

(a) Hvor mange kvantestrenger finnes det med lengde ti? Hva med lengde tjue?

(b) Hvor mange kvantestrenger av lengde ti finnes det med *nøyaktig* tre forekomster av `0`?

(c) Hvor mange kvantestrenger finnes det med nøyaktig to forekomster av `0`, tre forekomster av `1` og fem forekomster av ϕ?

Oppgave 8.

(a) La K være en mengde med tre elementer. Hvor mange partisjoner P av K finnes det slik at $|P| = 2$, det vil si med nøyaktig to elementer?

(b) La L være en mengde med fire elementer. Hvor mange partisjoner P av L finnes det, slik at $|P| = 3$, det vil si med nøyaktig tre elementer?

(c) La M være en mengde med m elementer. Hvor mange partisjoner P av M finnes det, slik at $|P| = m - 1$, det vil si med nøyaktig $m - 1$ elementer?