Objektorientert programmering og løsning av ODE'er

Ole Christian Lingjærde, Institutt for Informatikk, UiO

28. oktober 2019

Plan for denne og neste uke

- Vi skal se grundig på et stort praktisk programmeringseksempel
- Løsning av (systemer av) ordinære differensiallikninger (ODE'er)
- Litt matematikk, men mest programmering
- Krever forståelse av klasser og klassehierarkier
- Krever erfaringsmessig noe innsats for å forstå
- Eksamensrelevant tema

Læringsmål for denne og neste uke

- Prinsippene bak objektorientert programmering (OOP)
- Kjenne til enkle ODE-løsere
- Vite hvordan de kan implementeres som hierarki av klasser
- Forstå hva et system av ODEer er, og hvordan løse det
- Forstå implementasjon og bruk av ODESolver

En enkel klasse

Klasse som bare inneholder data og konstruktør:

```
# Vi definerer klassen:
class K:
   def __init__(self, a, b):
      self.a = a
      self.b = b

# Vi lager en instans av klassen:
p = K(2, 6)  # p peker på ny instans av klassen

# Vi ser på innholdet:
print(p.a)   # Skriver ut 2
print(p.b)   # Skriver ut 6
```

Flere instanser av klassen

Vi kan lage flere objekter (instanser) av klassen:

```
# Vi definerer klassen:
class K:
   def __init__(self, a, b):
      self.a = a
      self.b = b

# Vi lager to instanser av klassen:
p1 = K(0, 1)
p2 = K(2, 6)

# Vi ser på innholdet:
print(p1.a)   # Skriver ut 0
print(p1.b)   # Skriver ut 1
print(p2.a)   # Skriver ut 2
print(p2.b)   # Skriver ut 6
```

Merk: totalt *fire verdier* er lagret!

Klasse med funksjoner

Klasse som også inneholder en funksjon:

```
# Vi definerer klassen:
class K:
   def __init__(self, a, b):
      self.a = a
      self.b = b

   def verdi(self, x):
      return self.a * x + self.b

# Vi lager to instanser:
p1 = K(0, 1)
p2 = K(6, 8)
print(p1.verdi(1))  # Skriver ut 1
print(p2.verdi(1))  # Skriver ut 14
```

Spesialmetoder

- Metoden `__init__` er spesiell: vi kaller aldri direkte på den
- Den utføres automatisk når en instans lages
- Det finnes mange spesialmetoder, alle har navn av typen `__XXXX__`.
- De er ikke strengt tatt nødvendige, men kan gjøre programmer mer elegante
- Krever trening å bli kjent med bruken av dem!

Noen spesialmetoder

```
a.__init__(self, args)       # Konstruktør
a.__del__(self)              # Destruktør
a.__call__(self, args)       # Funksjonskall
a.__str__(self)              # Tekstrepresentasjon
a.__repr__(self)             # a = eval(repr(a))
a.__add__(self, b)           # a + b
a.__sub__(self, b)           # a - b
a.__mul__(self, b)           # a * b
a.__div__(self, b)           # a / b
a.__pow__(self, b)           # a ** b
a.__lt__(self, b)            # a < b
a.__le__(self, b)            # a <= b
a.__gt__(self, b)            # a > b
a.__ge__(self, b)            # a >= b
a.__eq__(self, b)            # a == b
a.__ne__(self, b)            # a != b
```

Eksempel

- Vi ønsker å definere en klasse `Complex` hvor objekter representerer komplekse tall med realdel og imaginærdel.
- De komplekse tallene $x = 1 + 2i$ og $z = 2 + i$ skal kunne lages slik: `x = Complex(1,2)` og `z = Complex(2,1)`.
- Løsning: vi lager en klasse med to variabler `real` og `imag`.
- Vi ønsker også å kunne summere ved å skrive `x + z`.
- Løsning: vi bruker spesialmetoden `__add__(self,z)`.

Eksempel (forts.)

La $x = a + bi$ og $z = c + di$ være to komplekse tall. Da er:

$$x + z = (a + c) + (b + d)i$$

Anta at vi "sitter inni" objektet x. Vi ser attributtene `self.real` og `self.imag`. Hvis vi får tilsendt et annet komplekst tall z kan vi addere dem slik:

```
svar = Complex(self.real + z.real, self.imag + z.imag)
```

Implementasjon

```
class Complex:
    def __init__(self, real, imag):
        self.real = real
        self.imag = imag

    def __str__(self):
        s = '%g + %gi' % (self.real, self.imag)
        return s

    def __add__(self, z):
        real = self.real + z.real
        imag = self.imag + z.imag
        res = Complex(real, imag)
        return res

# Eksempel på bruk:
x = Complex(1,2)
y = Complex(2,1)
z = x + y
print(z)
```

Utvidelse til alle fire regnearter

- Anta at vi har klassen `Complex` fra forrige eksempel
- Vi kan bruke samme "trikset" til å definere alle fire regnearter
- Vi kan bruke spesialfunksjonene `__sub__`, `__mul__` og `__div__` på samme måte som vi har brukt `__add__`

Eksempel B: Python-kode

```
class Complex:
    <Alt tidligere som før>

    def __sub__(self, z):
        real = self.real - z.real
        imag = self.imag - z.imag
        res = Complex(real, imag)
        return res

    def __mul__(self, z):
        real = self.real*z.real - self.imag*z.imag
        imag = self.real*z.imag + self.imag*z.real
        res = Complex(real, imag)
        return res

    def __div__(self, z):
        r = z.real**2 + z.imag**2
        real = (self.real*z.real + self.imag*z.imag)/r
        imag = (self.imag*z.real - self.real*z.imag)/r
        res = Complex(real, imag)
        return res
```

Eksempler på bruk

```
x = Complex(1,1)    # x = 1 + i
y = Complex(2,3)    # y = 2 + 3i

print(x + y)        # 3 + 4i
print(x - y)        # -1 - 2i
print(x * y)        # -1 + 5i
print(x / y)        # 0.384615 + -0.0769231i

print(x * y / y)    # 1 + 1i
```

Variabelen `self`

- Tenk på `self` som en intern peker til objektet selv. Når en funksjon inni objektet utfører `self.v0 = ...` så blir klassevariabelen `v0` tilordnet en verdi.
- Husk: `self` er alltid første parameter i klassefunksjoner, men du skal ikke oppgi den når du kaller på slike funksjoner (det gjør Python "bak kulissene").

Hvordan implementere en funksjon med parametre?

Vi har en funksjon av t med parameter v_0 og en konstant $g = 9.81$:

$$f(t; v_0) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Vi trenger åpenbart både t, v_0 og $g = 9.81$ for å evaluere f, men hvordan programmere det i praksis?

Løsning A

Vi lar t, v_0 og g være argumenter til funksjonen:

```
t = 0.5
v0 = 50.0
g = 9.81
verdi = f(t, v0, g)
```

Kode:

```
def f(t, v0, g):
    return v0*t - 0.5*g*t**2
```

Løsning B

Vi lar t og v_0 være argumenter til funksjonen:

```
t = 0.5
v0 = 50.0
verdi = f(t, v0)
```

Kode:

```
def f(t, v0):
    g = 9.81
    return v0*t - 0.5*g*t**2
```

Løsning C

Vi lar kun t være argument til funksjonen:

```
t = 0.5
verdi = f(t)
```

Men hvordan får vi fortalt programmet hva verdien til $v0$ er, hvis $v0$ ikke er argument til funksjonen? Svar: bruk en klasse.

```
class F:
    def __init__(self, v0):
        self.v0 = v0
        self.g = 9.81

    def __call__(self, t):
        return self.v0*t - 0.5*self.g*t**2
```

```
v0 = 50.0
f = F(v0)      # Lag funksjonen f, med v0=50.0

t = 0.5
verdi = f(t)   # Bruk funksjonen f
```

Funksjoner med mange parametre

Gitt en funksjon med $n+1$ parametre og en uavhengig variabel:

$$f(x; p_0, \ldots, p_n)$$

er det smart å bruke en klasse til å implementere `f`, hvor $p_0, \ldots, p_n$ er attributter i klassen.

```
class MyFunc:
    def __init__(self, p0, p1, p2, ..., pn):
        self.p0 = p0
        self.p1 = p1
        ...
        self.pn = pn

    def __call__(self, x):
        return ...
```

Eksempel: funksjon med fire parametre

$$v(r;\beta,\mu_0,n,R) = \left(\frac{\beta}{2\mu_0}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1}\left(R^{1+\frac{1}{n}} - r^{1+\frac{1}{n}}\right)$$

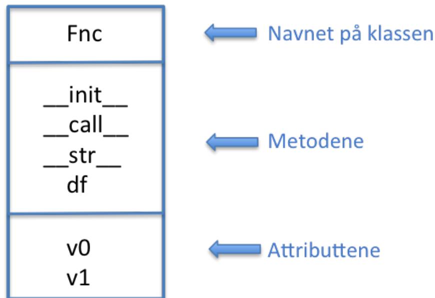
```
class VelocityProfile:
    def __init__(self, beta, mu0, n, R):
        self.beta, self.mu0, self.n, self.R = \
        beta, mu0, n, R

    def __call__(self, r):
        beta, mu0, n, R = \
        self.beta, self.mu0, self.n, self.R
        n = float(n)  # ensure float divisions
        v = (beta/(2.0*mu0))**(1/n)*(n/(n+1))*\
            (R**(1+1/n) - r**(1+1/n))
        return v

v = VelocityProfile(R=1, beta=0.06, mu0=0.02, n=0.1)
print(v(0.1))
```

UML-diagrammer

UML (Unified Modeling Language) er en visuell måte å fremstille og dokumentere datamodeller på.

Vi kan bruke UML-diagrammer til å visualisere innholdet i klasser, og relasjoner mellom klasser.

Eksempel (for klassen vi nettopp definerte):



Objektorientert programmering (OOP)

- Alt i Python er objekter, så teknisk sett er all Python-programmering objektbasert.
- I objektorientert programmering (OOP) går vi ett skritt videre.
- OOP utnytter en svært nyttig egenskap ved klasser: de kan settes sammen som byggeklosser!
- Hvis vi har definert en klasse `class A` så kan vi definere en ny klasse `class B(A)`.
- Da blir klassen `B` en *utvidelse* av klassen `A`
- Vi sier at `B` *arver* data og metoder fra `A`
- Vi sier også at `B` er subklasse av `A`, og at `A` er superklasse til `B`

Prinsipp A: Klasser kan arve fra andre klasser

```
class A:
    def __init__(self, v0, v1):
        self.v0 = v0
        self.v1 = v1

    def f(self, x):
        return x**2

class B(A):
    def g(self, x):
        return x**4

class C(B):
    def h(self, x):
        return x**6
```

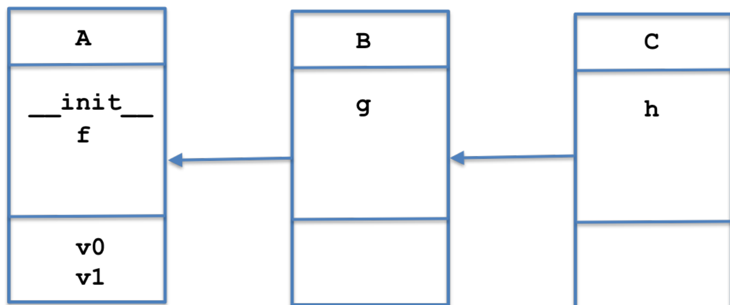
Vi har nå definert tre klasser:

`A` : to attributter (v0, v1) og to metoder (`__init__`, `f`)

`B` : to attributter (v0, v1) og tre metoder (`__init__`, `f`, `g`)

`C` : to attributter (v0, v1) og fire metoder (`__init__`, `f`, `g`, `h`)

UML-diagram



Innholdet i klassene A, B og C

```python
# I objekter av A har vi attributtene v0, v1 og metoden f:
p = A(2.7, 5.2)
print(p.v0)        # Utskrift: 2.7
print(p.v1)        # Utskrift: 5.2
print(p.f(3.0))    # Utskrift: 9.0

# I objekter av B har vi det samme + metoden g:
p = B(2.7, 5.2)
print(p.v0)        # Utskrift: 2.7
print(p.v1)        # Utskrift: 5.2
print(p.f(3.0))    # Utskrift: 9.0
print(p.g(3.0))    # Utskrift: 81.0

# I objekter av C har vi det samme + metoden h:
p = C(2.7, 5.2)
print(p.v0)        # Utskrift: 2.7
print(p.v1)        # Utskrift: 5.2
print(p.f(3.0))    # Utskrift: 9.0
print(p.g(3.0))    # Utskrift: 81.0
print(p.h(3.0))    # Utskrift: 729.0
```

Prinsipp B: Subklasser kan overkjøre metoder i superklasser

```python
class A:
    def __init__(self, a):
        self.a = a

    def skrivut(self):
        print("Klasse A")

class B(A):
    def __init__(self, b):   # Overkjører __init__ i class A
        self.b = b

    def skrivut(self):       # Overkjører skrivut i class A
        print("Klasse B")

# Eksempler på bruk
p = A(3)      # Lag objekt av superklassen A
p.skrivut()   # Utskrift: "Klasse A"
p = B(4)      # Lag objekt av subklassen B
p.skrivut()   # Utskrift: "Klasse B"
```

Hensikten med å overkjøre metoder

- Subklasser kan brukes for å legge til ny funksjonalitet. Da kan det tenkes at vi har behov for å definere enda flere instansvariable med konstruktøren. Da må denne defineres på nytt i subklassen.
- Subklasser kan også brukes for å restriktere funksjonaliteten i klassen det arves fra. Da kan det tenkes at vi trenger å initialisere noen av instansvariablene i superklassen til 0. Da må konstruktøren også defineres på nytt.
- Utskrift og andre funksjoner kan også være nødvendig å endre i subklasser.
- Kommer til å bli klarere etterhvert som vi ser eksempler

Prinsipp C: Overkjørte metoder finnes fortsatt

```
class A:
    def __init__(self, a):
        self.a = a

    def skrivut(self):
        print("Klasse A")

class B(A):
    def __init__(self, a, b):
        A.__init__(self, a)   # Kall __init__ i superklassen
        self.b = b

    def skrivut(self):
        A.skrivut(self)    # Kall skrivut i superklassen
        print("Klasse B")

p = B(3,4)  # Lag objekt av subklassen B
p.skrivut() # Utskrift: 'Klasse A' + linjeskift + 'Klasse B'
```

Prinsipp D: Vi kan ha mange nivåer av subklasser

```python
class A:
    def __init__(self, a):
        self.a = a
    def skrivut(self):
        print('a = %g' % self.a)

class B(A):
    def __init__(self, a, b):
        A.__init__(self, a)
        self.b = b
    def skrivut(self):
        print('a = %g, b = %g' % (self.a, self.b))

class C(B):
    def __init__(self, a, b, c):
        B.__init__(self, a, b)
        self.c = c
    def skrivut(self):
        print('a = %g, b = %g, c = %g' % (self.a, self.b, self.c))

p1 = A(1)
p1.skrivut()        # a = 1
p2 = B(1,2)
p2.skrivut()        # a = 1, b = 2
p3 = C(1,2,3)
p3.skrivut()        # a = 1, b = 2, c = 3
```

Prinsipp E: Vi kan alltid finne ut hvor vi er i hierarkiet

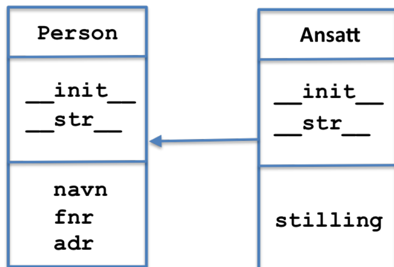
Anta at klassene A, B, C er definert som på forrige slide.

```
# Lag objekter av A og B
p = A(1)
q = B(1,2)

# Hvilke klasser er et objekt en instans av?
isinstance(p, A)  # True
isinstance(p, B)  # False
isinstance(q, A)  # True
isinstance(q, B)  # True

# Hvilken unike klasse tilhører objektet p?
print(p.__class__ == A)     # True
print(p.__class__ == B)     # False
print(q.__class__ == A)     # False
print(q.__class__ == B)     # True

# Alternativ til over
print(p.__class__.__name__ == 'A')    #  True

# Er klassen B en subklasse av klassen A?
issubclass(B, A)  # True
issubclass(A, B)  # False

# Finn navnet på superklassen til et objekt
print(q.__class__.__bases__[0].__name__)  # A
```

Eksempel A: Person <- Ansatt

```python
class Person:
    def __init__(self, navn, fnr, adr):
        self.navn = navn
        self.fnr = fnr
        self.adr = adr

    def __str__(self):
        s = 'Navn: %s\nFnr: %s\nAdresse: %s\n' % \
        (self.navn, self.fnr, self.adr)
        return s

class Ansatt(Person):
    def __init__(self, navn, fnr, adr, stilling):
        Person.__init__(self, navn, fnr, adr)
        self.stilling = stilling

    def __str__(self):
        s1 = Person.__str__(self)
        s2 = 'Stilling: %s\n' % self.stilling
        return(s1 + s2)

p = Person('Rex', '18050012345', 'Slottet')
print(p)

p = Ansatt('Rex', '18050012345', 'Slottet', 'Konge')
print(p)
```

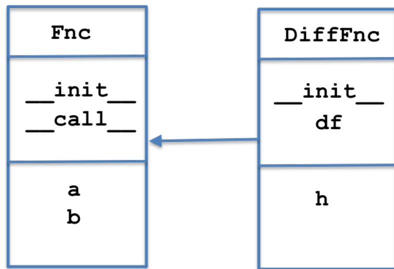
UML-diagram



Eksempel B: Fnc <- DiffFnc

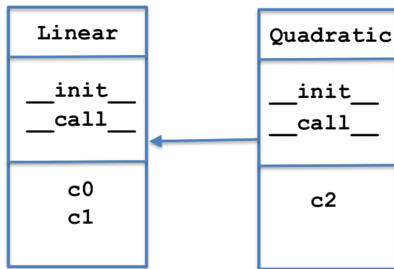
```
from math import sin, cos

class Fnc:
    def __init__(self, a, b):
        self.a = a
        self.b = b

    def __call__(self, x):
        res = self.a*sin(x) + self.b*cos(x)
        return res

class DiffFnc(Fnc):
    def __init__(self, a, b, h=1E-5):
        Fnc.__init__(self, a, b)
        self.h = h

    def df(self, x):
        res = self.a*cos(x) - self.b*sin(x)
        return res

#
f = Fnc(2,6)
print(f(3))          # -5.65771496348
#
f = DiffFnc(2,6)
print(f(3))          # -5.65771496348
print(f.df(3))       # -2.82670504156
```

UML-diagram



Eksempel C: Linear <- Quadratic

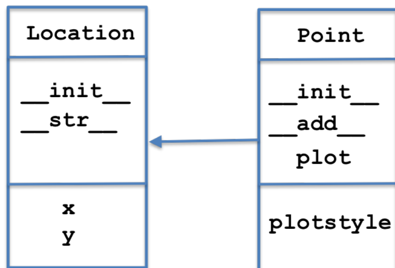
```python
class Linear:
    def __init__(self, c0, c1):
        self.c0 = c0
        self.c1 = c1

    def __call__(self, x):
        return self.c0 + self.c1*x

class Quadratic(Linear):
    def __init__(self, c0, c1, c2):
        Linear.__init__(self, c0, c1)
        self.c2 = c2

    def __call__(self, x):
        return Linear.__call__(self, x) + self.c2*x**2

# Test av klassene
p = Quadratic(3, 4, 5)
print(p(2.5))                # 44.25
```


Linear
__init__
__call__
c0
c1
Quadratic
__init__
__call__
c2

Eksempel D: Location <- Point

```
import matplotlib.pyplot as plt

class Location:
    def __init__(self, x, y):
        self.x = x; self.y = y

    def __str__(self):
        return '(%g, %g)' % (self.x, self.y)

class Point(Location):
    def __init__(self, x, y, plotstyle='ro'):
        Location.__init__(self, x, y)
        self.plotstyle = plotstyle

    def __add__(self, p):
        xnew = self.x + p.x
        ynew = self.y + p.y
        return Point(xnew, ynew)

    def plot(self):
        plt.plot(self.x, self.y, self.plotstyle)

p1 = Point(3,4); p2 = Point(1,1); p3 = Point(2.5, 1.5)
p4 = p1 + p3
p1.plot(); p2.plot(); p3.plot(); p4.plot()
```

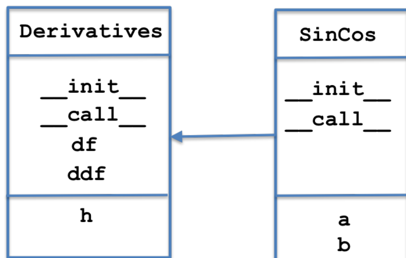
UML-diagram



Eksempel E: Derivatives <- SinCos

```
from math import sin, cos

class Derivatives:
    def __init__(self, h=1E-5):
        self.h = float(h)

    def __call__(self, x):
        print('Not implemented in this class!')

    def df(self, x):
        return (self(x+self.h)-self(x-self.h))/(2*self.h)

    def ddf(self, x):
        return (self(x+self.h)-2*self(x)+self(x-self.h))/(self.h**2)

class SinCos(Derivatives):
    def __init__(self, a, b):
        Derivatives.__init__(self)
        self.a = a; self.b = b

    def __call__(self, x):
        return self.a * cos(x) + self.b * sin(x)

f = SinCos(3, 6); x = 0.5
print('f(%g) = %g' % (x, f(x)))
print('df(%g) = %g' % (x, f.df(x)))
print('ddf(%g) = %g' % (x, f.ddf(x)))
```

UML-diagram



Løsning av ODE'er

- ODE = Ordinary Differential Equation
- Likning hvor den ukjente er en funksjon $u(t)$
- Differential: knytter sammen $u(t)$, $u'(t)$ (og evt høyereordens deriverte)
- Ordinary: ser bare på deriverte i én variabel (f.eks. t)

Vi kommer til å se på to varianter av ODE'er:

- Skalar ODE: en likning
- Vektor ODE: flere likninger (likningssystem)

Eksempel A

Anta at vi skal finne funksjonen $u(t)$ når vi vet at

$$u'(t) = t^3$$

Vi kan integrere på begge sider:

$$u(t) = \frac{1}{4}t^4 + C$$

Hvis vi i tillegg har en *initialbetingelse* $u(0) = 1$ kan vi finne C:

$$u(t) = \frac{1}{4}t^4 + 1$$

Eksempel B

Anta at vi skal finne funksjonen $u(t)$ når vi vet at

$$u'(t) = f(t)$$

Vi kan igjen integrere begge sider:

$$u(t) = \int f(t)\,dt + C$$

Har vi en initialbetingelse $u(0) = u_0$ kan vi igjen finne C.

Vi har sett tidligere i kurset hvordan man kan regne ut integraler numerisk.

Eksempel C

Eksempel A og B var veldig enkle differensiallikninger, siden vi kunne finne $u(t)$ bare ved å integrere på begge sider. Vi ser nå på en likning hvor u(t) også forekommer i høyresiden:

Anta at vi skal finne funksjonen $u(t)$ når vi vet at

$$u'(t) = \alpha u(t)$$

Vi prøver som før å integrere på begge sider:

$$u(t) = \alpha \int u(t)\, dt + C$$

Vi har funnet et uttrykk for $u(t)$, men høyresiden inneholder den ukjente funksjonen!

Hvordan løse Eksempel C?

Eksempel C er såpass enkel at vi kan løse den matematisk:

Vi skal finne $u(t)$ når

$$u'(t) = \alpha u(t)$$

Vi flytter om:

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \alpha$$

Vi får en smart innsikt og ser at dette kan skrives

$$(\ln u(t))' = \alpha$$

Vi integrerer på begge sider:

$$(\ln u(t)) = \int \alpha \, dt = \alpha t$$

Vi tar $exp(.)$ på begge sider:

$$u(t) = e^{\alpha t}$$