
IN2070 – Vår 2021 – Ukens temaer

(Kap 3.3 i DIP)

- Kjapp repetisjon av gråtonetransformasjon
- Histogramtransformasjoner
 - Histogramutjevning
 - Histogramtilpasning/histogramspesifikasjon
 - Standardisering av histogram for billedserier
- Lokal gråtone-transformasjon

Repetisjon av histogrammer

- Gråtonehistogram:

$h(i)$ = antall piksler i bildet med pikselverdi i ,
og følgelig er $\sum_{i=0}^{G-1} h(i) = n \times m$

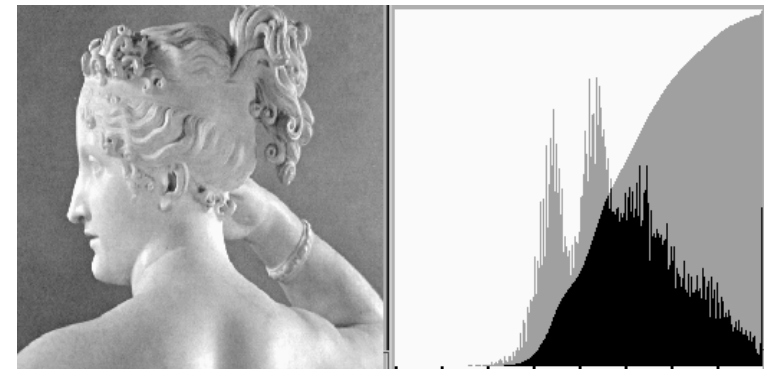
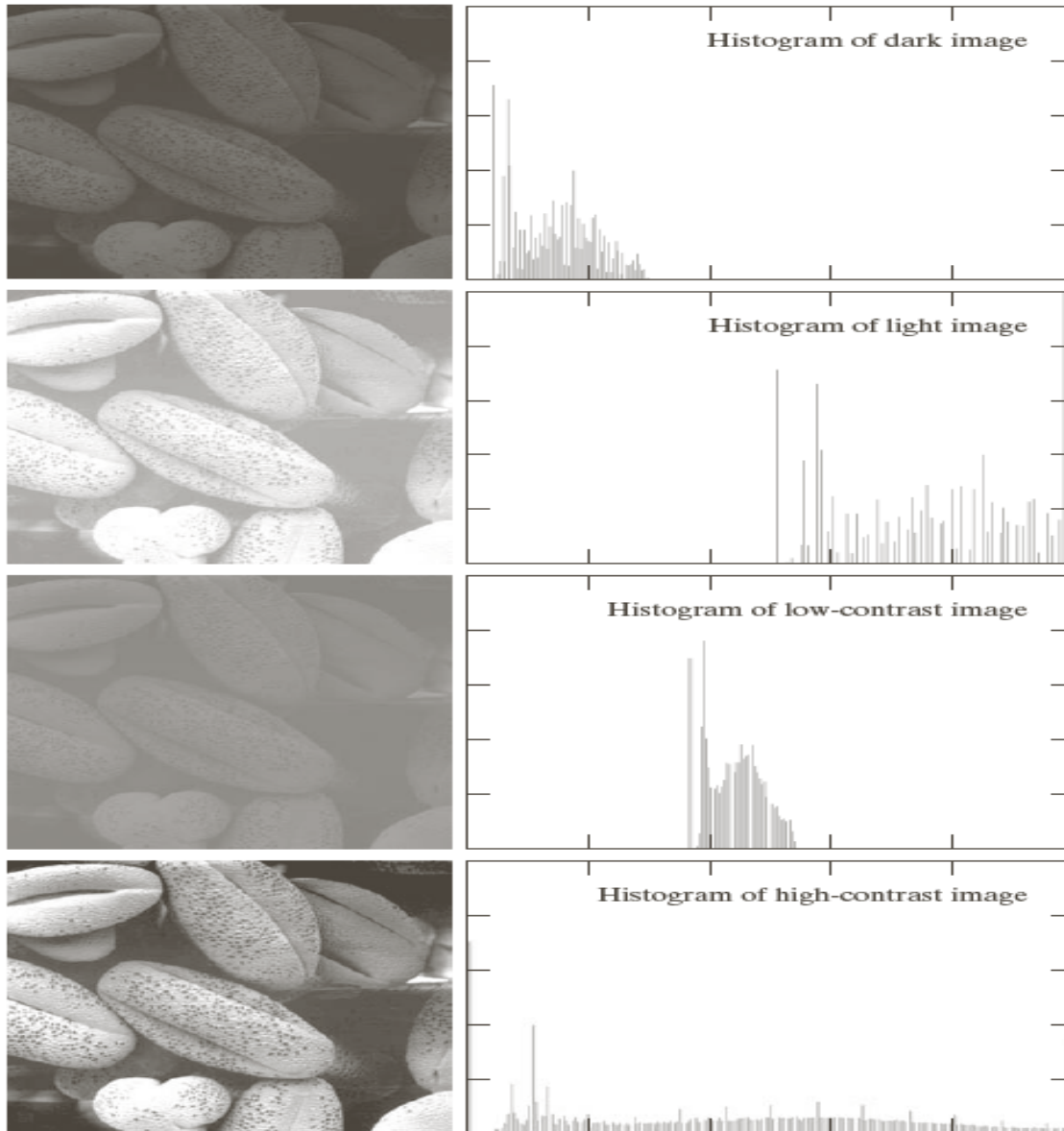
- Det normaliserte histogrammet:

$$p(i) = \frac{h(i)}{n \times m}, \quad \sum_{i=0}^{G-1} p(i) = 1$$

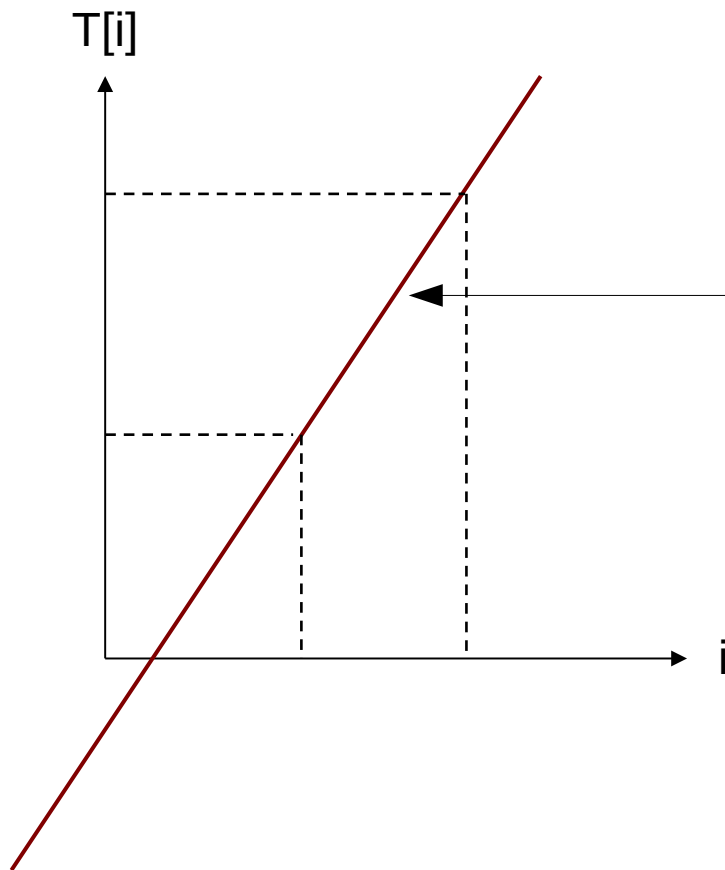
- Det normaliserte kumulative histogrammet:

$$c(j) = \sum_{i=0}^j p(i)$$

Repetisjon av histogrammer II



Repetisjon av gråtonetransform



Forrige uke: $T[i]$ gitt som en parametrisk funksjon.

Feks en linje i planet:
 $T[i] = ai + b$

I dag: Gitt et bilde, **finn $T[i]$ ved å spesifisere ønsket histogram.**

Histogramutjevning

(histogram equalization)

- Mål: *Maksimere kontrasten* og samtidig beholde *gråtonerikheten*

Gjøre histogrammet uniformt (flatt)



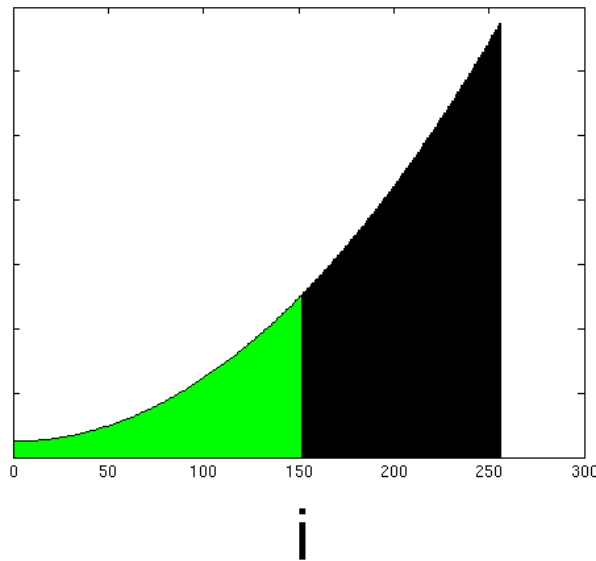
Kumulative histogrammet en rett linje

- Middel: Global gråtonetransform; $T[i]$
 - Altså flytte på (hele) histogramsøyler
- Tilnærming ved å spre søylene mest mulig utover det støttede intensitetsintervallet

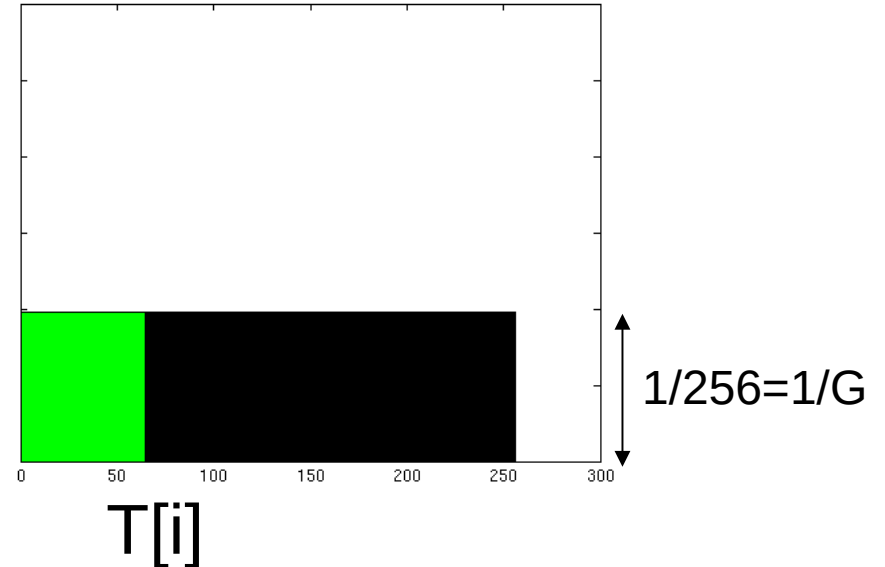
Tommelfingerløsning

- Vil ha store mellomrom mellom høye histogramsøyler, og lite mellomrom der vi har lave søyler, samt ikke bytte om rekkefølgen
 - en transform med høyt stigningstall hvor det er mange piksler, og lavt stigningstall hvor det er få piksler
- Det **kumulative histogrammet** har akkurat disse egenskapene
- Histogramutjevnings-transformen, $T[i]$, er (faktisk) gitt ved det skalerte kumulative histogrammet til innbildet
 - Bittelitt mer håndfast utledning på neste side
 - En (riktig så) formell utledning i læreboka

Tommelfingerløsning++ I/II



T



$$\int_0^i p(x) dx$$

$=$
 \Downarrow

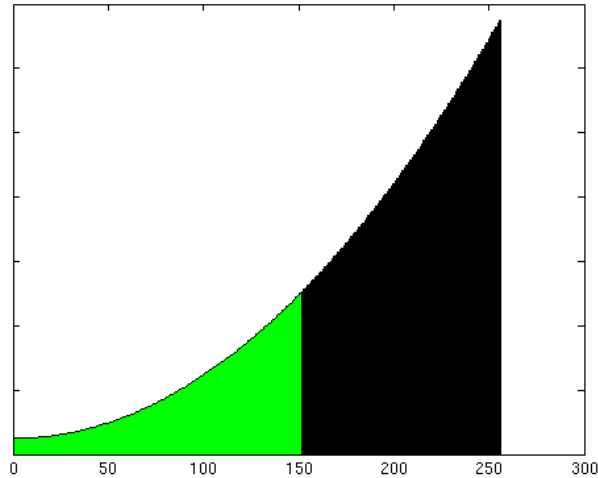
$$T[i] = G \int_0^i p(x) dx$$

$$T[i] \frac{1}{G}$$

Vi får tilnærmet det samme om vi bytter integrasjonen med en summasjon
→ diskret histogramutjevning

Tommelfingerløsning++ II/II

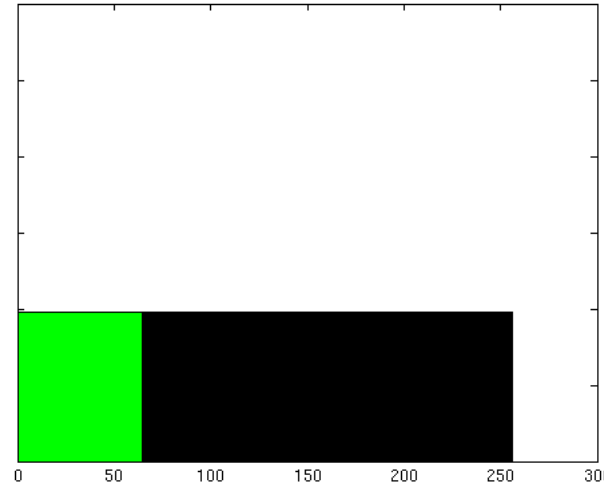
p



i

T

q



$1/256=1/G$

$T[i]$

$c_p(i)$

\approx
 \Downarrow

$$c_q(T[i]) = T[i] \frac{1}{G}$$

$$T[i] \approx Gc_p(i)$$

Normalisert kumulativt histogram

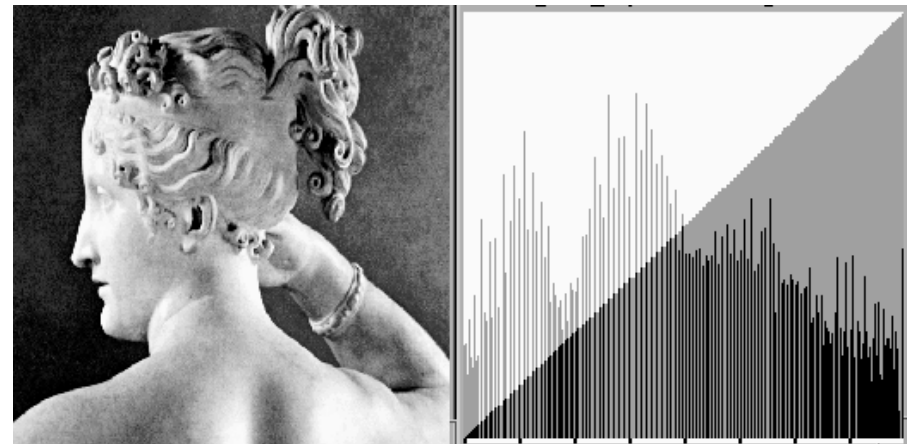
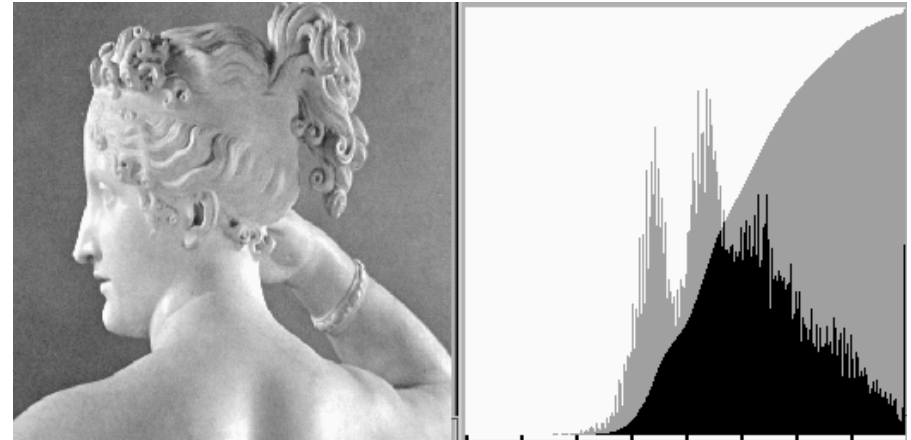
Normalisert kumulativt histogram

Pseudokode for histogramutjevning

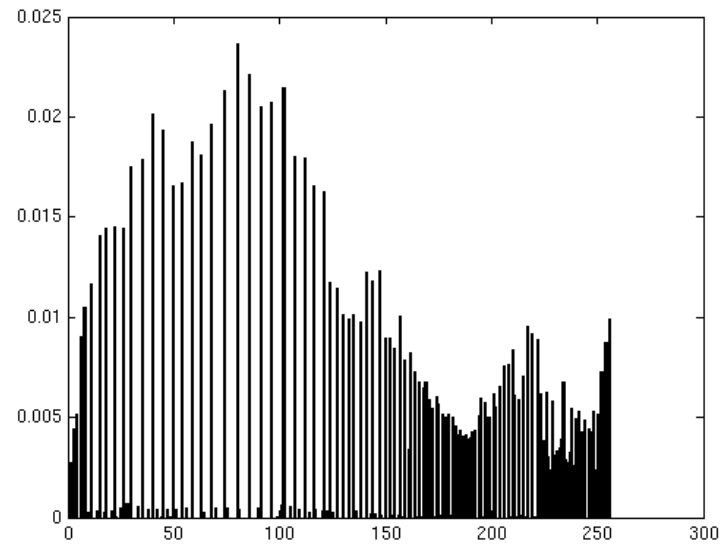
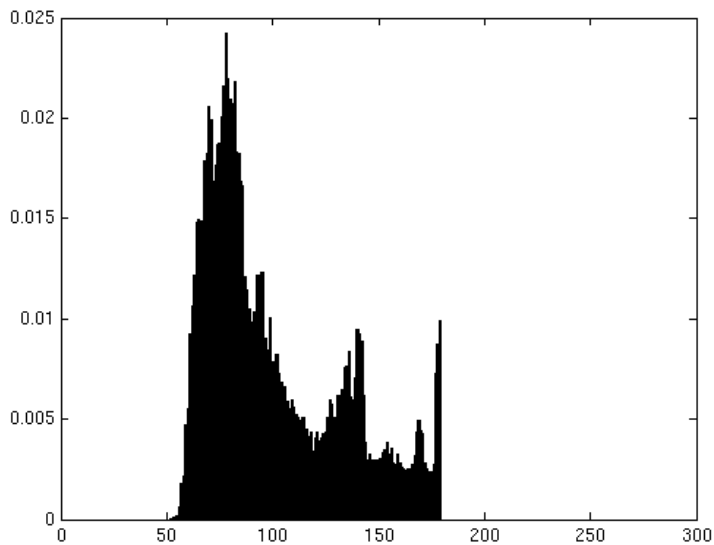
- For et $n \times m$ bilde med G gråtoner:
 - Lag array h , p , c og T av lengde G
 - Finn bildets normaliserte histogram
 - Gå igjennom bildet piksel for piksel. Hvis piksel har intensitet i , la $h[i]=h[i]+1$
 - Deretter skalér, $p[i] = h[i]/(n*m)$, $i=0,1,\dots,G-1$
 - Lag det (normaliserte) kumulative histogrammet c
 - $c[0] = p[0]$
 - $c[i] = c[i-1]+p[i]$, $i=1,2,\dots,G-1$
 - Sett inn verdier i transformarray T
 - $T[i] = \text{round}((G-1)*c[i])$, $i=0,1,\dots,G-1$
- ← Alternativt $T[i] = \text{ceil}(G*c[i] - 1)$
- Gå igjennom bildet piksel for piksel,
 - Hvis pikselen har intensitet i , sett intensitet i utbildet til $s=T[i]$

Histogramutjevning – eksempel I

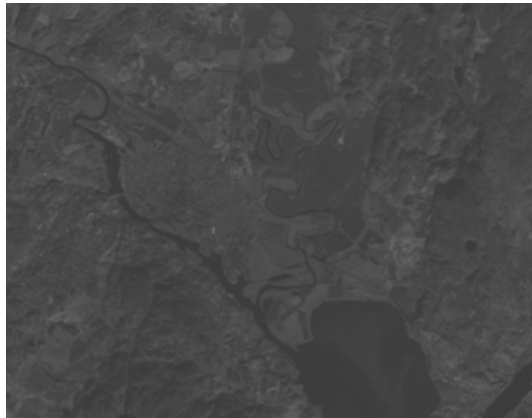
- Det resulterende histogrammet ser ikke flatt ut, men det kumulative histogrammet er tilnærmet en rett linje
- Husk at søylene ikke kan splittes for å tilfredstille et flatt histogram ved ren gråtonetransform



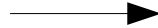
Histogramutjevning – eksempel II



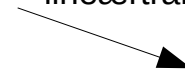
Histogramutjevning – eksempel III



Histogram-
utjevning



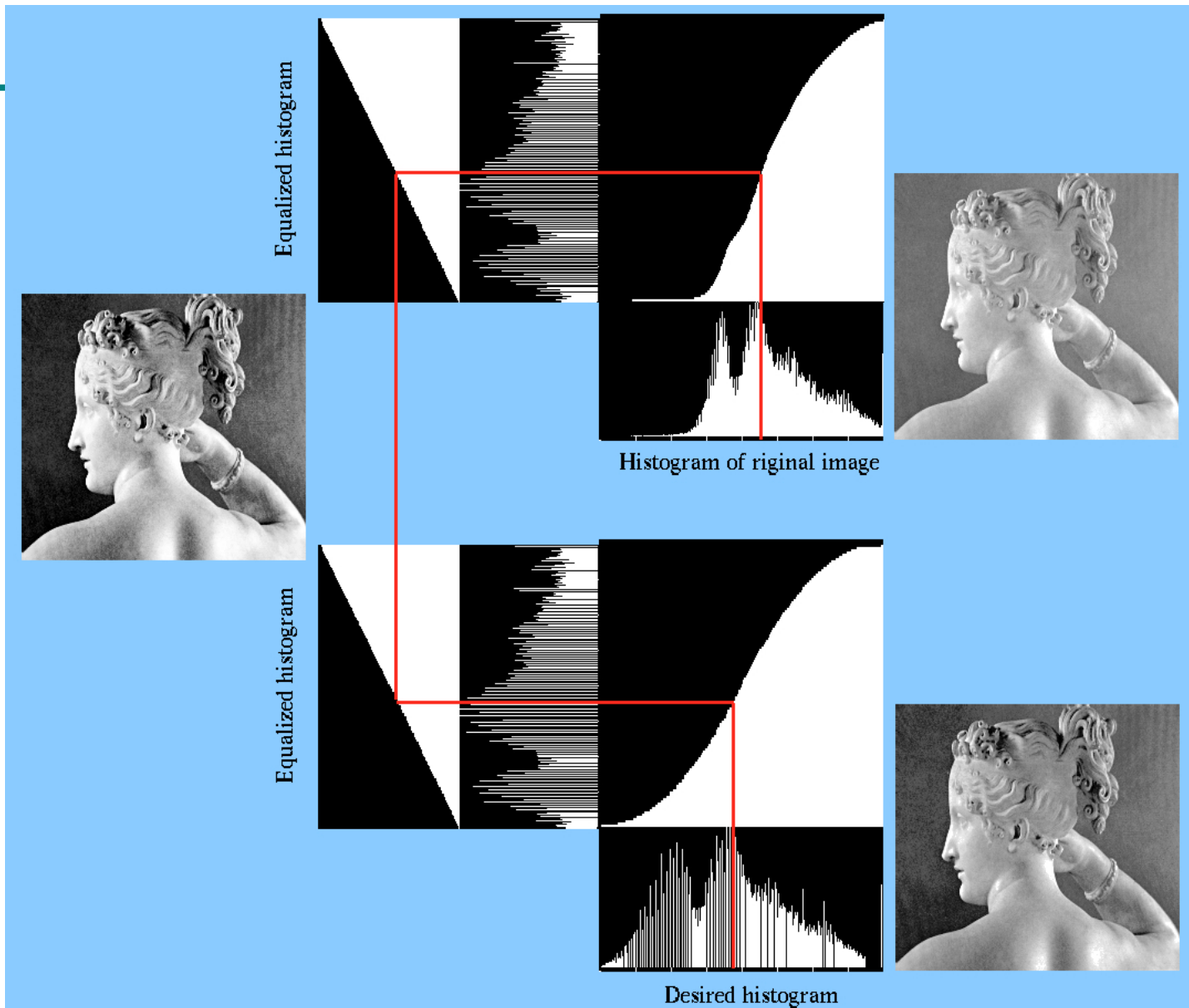
Stykkevis
lineærtransform



Histogramutjevning gir ikke nødvendigvis det beste visuelle resultatet!

Histogramtilpasning I/II

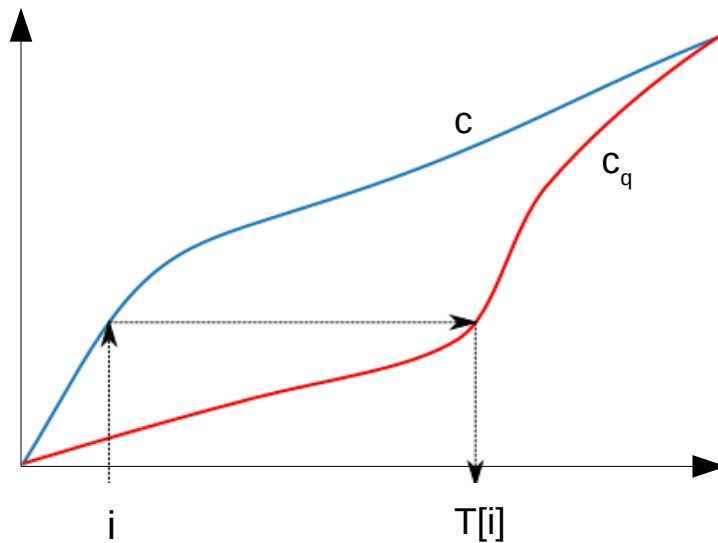
- Histogramutjevning gir (tilnærmet) flatt histogram
- Kan spesifisere annen form på resultathistogrammet:
 1. Gjør histogramutjevning på innbildet, finn $s=T(i)$
 2. Spesifiser ønsket nytt histogram $g(z)$
 3. Finn den transformen T_g som histogramutjevner $g(z)$ og inverstransformen T_g^{-1}
 4. Inverstransformer det histogramutjevnete bildet fra punkt 1 ved $z=T_g^{-1}(s)$



(Fra http://fourier.eng.hmc.edu/e161/lectures/contrast_transform/node3.html)

Histogramtilpasning II/II

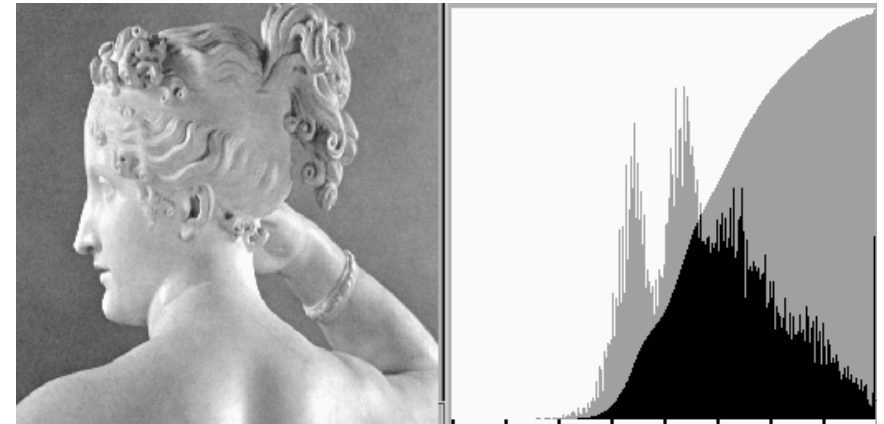
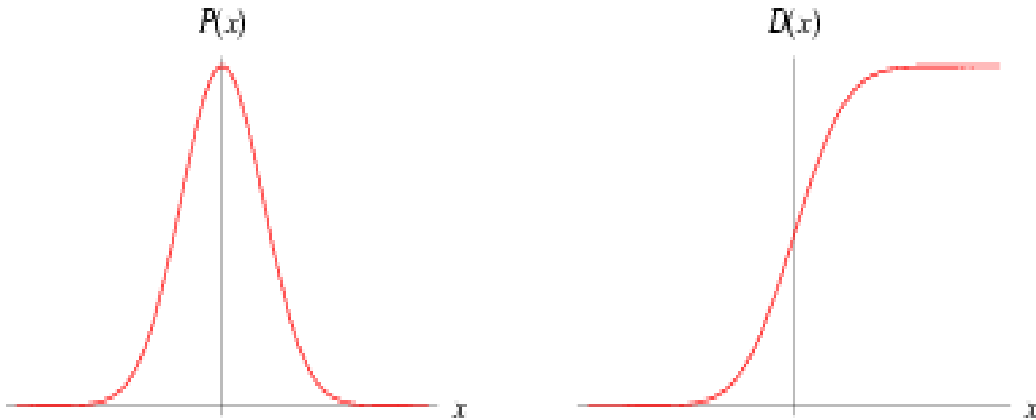
- Alternativ tankegang: Flytt søylene på det *kumulative* histogrammet slik at vi får et nytt *kumulativt* histogram som ligner på det ønskede
- For hver i har vi en søylehøyde $c(i)$..
- .. finn så $T[i]$ slik at søylehøyden på det ønskede kumulative histogrammet, c_q , blir tilnærmet likt $c(i)$



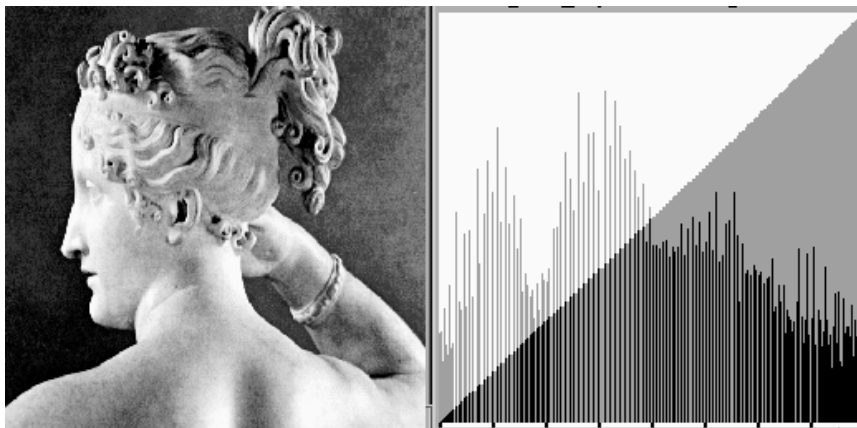
$$c(i) \approx c_q(T[i])$$

Finn beste $T[i]$ for hver i

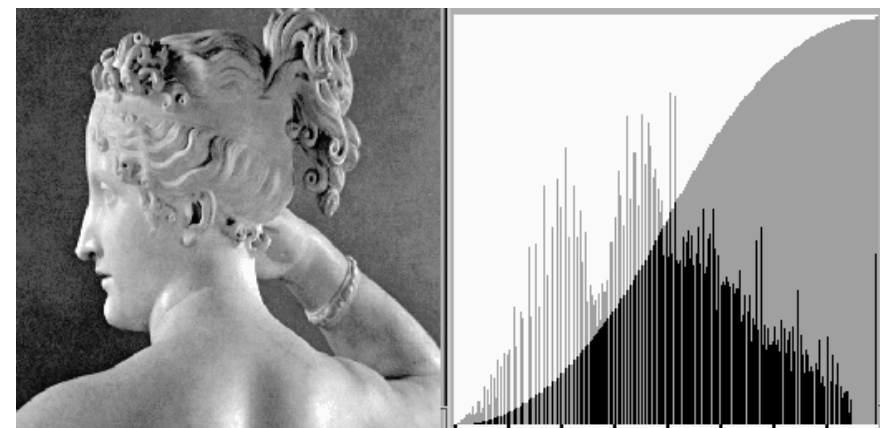
Tilpasning til Gauss-profil



Originalbilde



Histogram-utjevnet

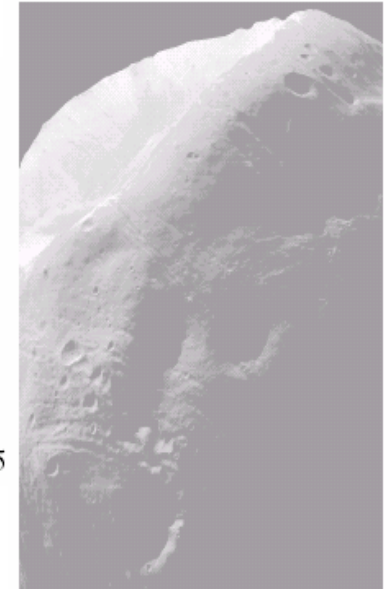
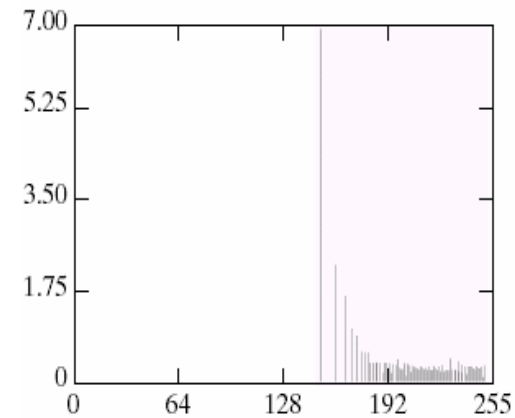
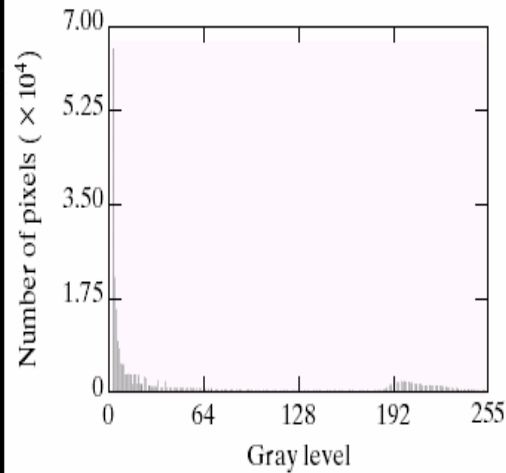


Tilpasset Gauss-form

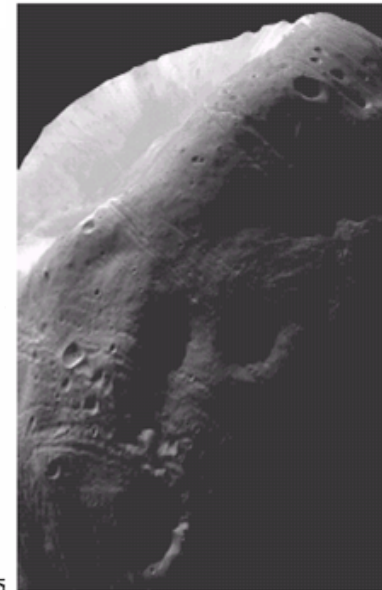
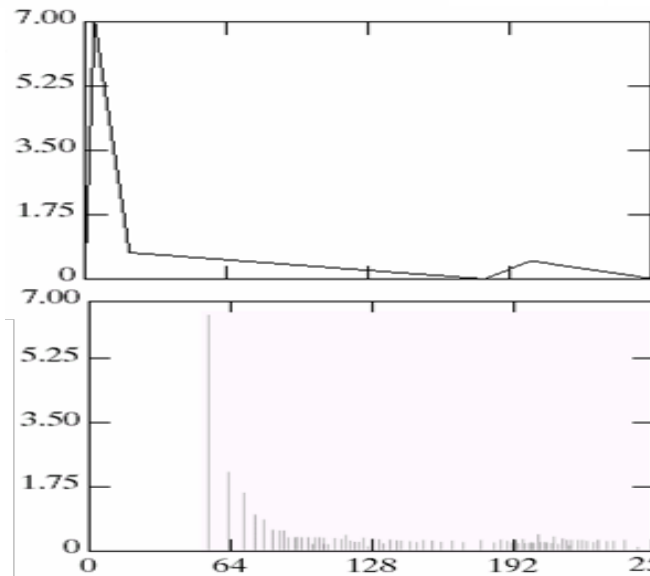
Tilpasning til vilkårlig kurve



Histogramutjevning



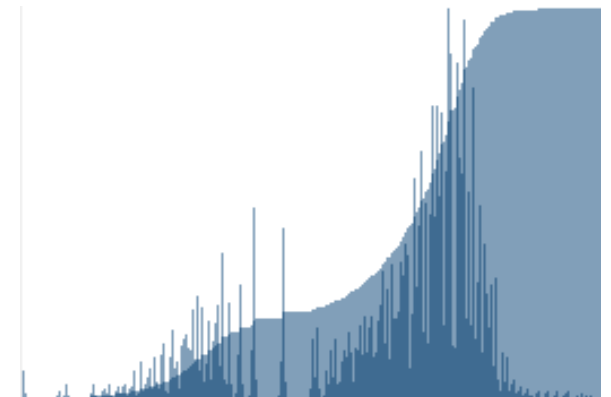
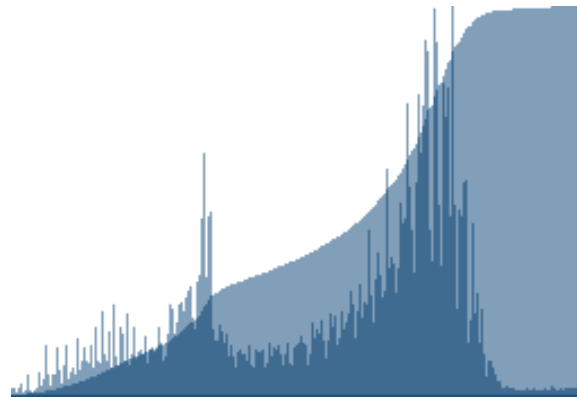
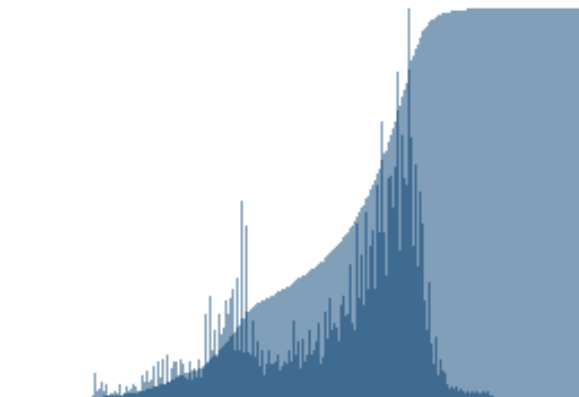
Tilpass til denne kurven



(Bilder hentet fra DIP/NASA)

”Histogram matching”

- Histogramtilpasning hvor det ene bildets histogram benyttes som ønsket form



Standardisering av histogram

- Hensikt:
 - Sørge for at alle bildene i en serie har like histogrammer
 - Antar altså at fordelingene av gråtonene bør være nogenlunde lik over bildene
- Metoder:
 - Histogramutjevning
 - Histogramspesifikasjon (f.eks. til oppgitt Gauss-profil eller referansebilde)
- Hvorfor? Fjerne effekten av
 - Døgnvariasjon i belysning
 - Aldringseffekter i lamper og detektorer
 - Akkumulering av støv på linser etc.
- Hvor:
 - Produkt-inspeksjon i industri
 - Ansiktsgjenkjenning
 - Medisinsk avbildning
 - ...

Jfr. forrige uke, da vi standardiserte bilder ved å benytte en lineær strekking til å gi bildene samme middelværdi og varians

Når bør du IKKE gjøre dette?

- Ikke standardisere histogrammet hvis:
 - Det kan være "reelle" variasjoner i middelerdi og varians til bildene i en bildeserie
 - «Formen» på histogrammet kan ha verdi ved videre analyse
- Hva gjør du?
 - Behold originalene, og jobb på kopier (selfølgelig..)
 - Gjør lineære gråtonetransformasjoner på bildene
 - Dette vil bevare strukturene i histogrammet, selv om (μ, σ) endres
- Eksempel:
 - Mikroskopering av kreft-celler (se neste side)

(Fra B. Nielsen et.al)

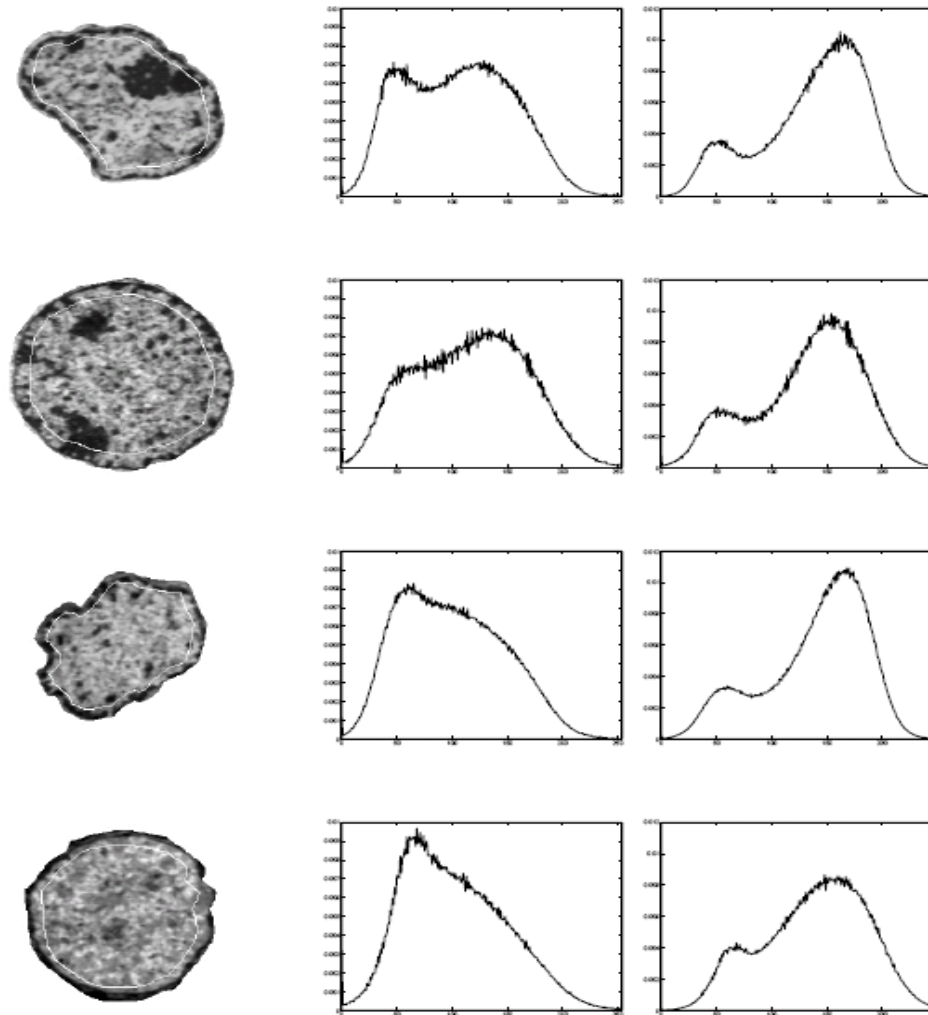
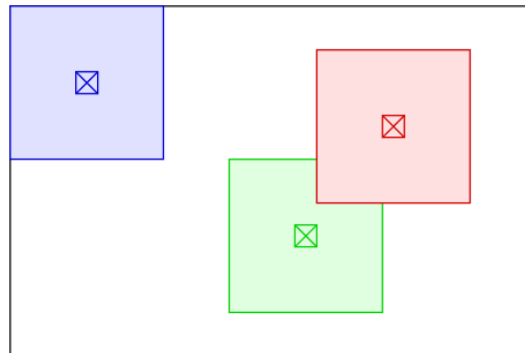


Figure 1: **First column:** Examples of liver cell nuclei from normal, regenerating, noduli and tumor samples. The borders between the 30% peripheral and 70% central part are outlined as a thin white line. **Second column:** The mean gray level histograms from all cell nuclei within each of the four classes, based on the 30% peripheral part of nuclei. **Third column:** The mean gray level histograms from all cell nuclei within each of the four classes, based on the central 70% of the nuclei.

Lokal gråtonetransform (GTT) I/III

- Vil standardisere den **lokale** kontrasten
 - Vil ha samme “lyshet” og kontrast over hele bildet
- Transformasjonene vi har sett på kan beregnes ut fra pikselverdiene i en **lokal omegn** (typisk et kvadratisk vindu) omkring punktet (x,y)
 - Kun pikselen (x,y) bestemmes av transformen basert på dette vinduets piksler
 - Altså egen transform for hver piksel i bildet (adaptiv)



Lokal GTT III/III

- Utfør lokal GTT som prøver å oppnå samme kontrast over hele bildet
 - Histogramspesifikasjon
 - Beregn det kumulative histogrammet i et *vindu* sentrert om (x,y)
 - Endre *senterpikselen* ved den resulterende transformen
 - Lineær standardisering av σ
 - Beregn μ_{xy} og σ_{xy} i et vindu sentrert om (x,y)
 - Transformer $f(x,y)$ til $g(x,y)$ med en lineær transform som gir nytt standardavvik σ_0 innenfor vinduet

$$g_1(x, y) = \mu_{xy} + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy}}$$

(Husk at vi kom frem til dette uttrykket forrige uke)

Lokal GTT – Eksempel I

Any eigenvector, x , of A where $Rx \neq 0$, has an eigenvalue that goes to ∞ as $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' Ax = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' \Sigma x + \lambda \lambda' R x = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' A^{-1} x = 0$$

Thus, as $\lambda \rightarrow \infty$, the only eigenvectors of A^{-1} with nonzero eigenvalues are the k eigenvectors included in (and spanning) $span(V)$.

Now let $\Omega = VV'$. The eigenvectors in $span(V)$ are retained when multiplied by Ω , i.e., $x \in span(V) \Rightarrow \Omega x = x$, while $x \in null(V) \Rightarrow \Omega x = 0$. Letting the columns of S contain the eigenvectors of A as $\lambda \rightarrow \infty$, we see that ΩS has k nonzero columns corresponding to the k eigenvectors in $span(V)$. We can thus remove the eigenvectors in $null(V)$ by multiplying Ω on both sides of A :

$$(\Omega S)D(S'\Omega) = \Omega(SDS')\Omega = \Omega A \Omega$$

where D is a diagonal matrix containing the eigenvalues of A . Furthermore, the eigenvectors in $span(V)$ are independent of λ :

$$\Omega A \Omega = \Omega \Sigma \Omega + \lambda \widehat{\Omega R \Omega} = \Omega \Sigma \Omega$$

Thus, the eigenvectors and inverted eigenvalues of $\Omega \Sigma \Omega$ are the same as the nonzero eigenvectors and eigenvalues in $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\Sigma + \lambda R)^{-1}$, which concludes the proof.

A.3 The $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$ ratio in QDA

We know, from Appendices A.1 and A.2, that our proposition is correct for the second term in (IV-1), the Mahalanobis distance. In LDA this is all that is needed to show equality of the classifiers, but in QDA we must also show that the ratio $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$ for any two classes i and j , or the differences in their log values, becomes equal in the regularized and the feature-reduced case. That is, letting Σ_{ik} denote class i 's $k \times k$ sample covariance matrix, we must show that (choosing classes 1 and 2 for notational simplicity)

$$\frac{|\Sigma_1 + \lambda R|}{|\Sigma_2 + \lambda R|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{|\Sigma_{k1}|}{|\Sigma_{k2}|}$$

Original

Any eigenvector, x , of A where $Rx \neq 0$, has an eigenvalue that goes to ∞ as $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' Ax = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' \Sigma x + \lambda \lambda' R x = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' A^{-1} x = 0$$

Thus, as $\lambda \rightarrow \infty$, the only eigenvectors of A^{-1} with nonzero eigenvalues are the k eigenvectors included in (and spanning) $span(V)$.

Now let $\Omega = VV'$. The eigenvectors in $span(V)$ are retained when multiplied by Ω , i.e., $x \in span(V) \Rightarrow \Omega x = x$, while $x \in null(V) \Rightarrow \Omega x = 0$. Letting the columns of S contain the eigenvectors of A as $\lambda \rightarrow \infty$, we see that ΩS has k nonzero columns corresponding to the k eigenvectors in $span(V)$. We can thus remove the eigenvectors in $null(V)$ by multiplying Ω on both sides of A :

$$(\Omega S)D(S'\Omega) = \Omega(SDS')\Omega = \Omega A \Omega$$

where D is a diagonal matrix containing the eigenvalues of A . Furthermore, the eigenvectors in $span(V)$ are independent of λ :

$$\Omega A \Omega = \Omega \Sigma \Omega + \lambda \widehat{\Omega R \Omega} = \Omega \Sigma \Omega$$

Thus, the eigenvectors and inverted eigenvalues of $\Omega \Sigma \Omega$ are the same as the nonzero eigenvectors and eigenvalues in $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\Sigma + \lambda R)^{-1}$, which concludes the proof.

A.3 The $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$ ratio in QDA

We know, from Appendices A.1 and A.2, that our proposition is correct for the second term in (IV-1), the Mahalanobis distance. In LDA this is all that is needed to show equality of the classifiers, but in QDA we must also show that the ratio $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$ for any two classes i and j , or the differences in their log values, becomes equal in the regularized and the feature-reduced case. That is, letting Σ_{ik} denote class i 's $k \times k$ sample covariance matrix, we must show that (choosing classes 1 and 2 for notational simplicity)

$$\frac{|\Sigma_1 + \lambda R|}{|\Sigma_2 + \lambda R|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{|\Sigma_{k1}|}{|\Sigma_{k2}|}$$

Global histogram-
utjevning

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' Ax = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' \Sigma x + \lambda \lambda' R x = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' A^{-1} x = 0$$

Thus, as $\lambda \rightarrow \infty$, the only eigenvectors of A^{-1} with nonzero eigenvalues are the k eigenvectors included in (and spanning) $span(V)$.

Now let $\Omega = VV'$. The eigenvectors in $span(V)$ are retained when multiplied by Ω , i.e., $x \in span(V) \Rightarrow \Omega x = x$, while $x \in null(V) \Rightarrow \Omega x = 0$. Letting the columns of S contain the eigenvectors of A as $\lambda \rightarrow \infty$, we see that ΩS has k nonzero columns corresponding to the k eigenvectors in $span(V)$. We can thus remove the eigenvectors in $null(V)$ by multiplying Ω on both sides of A :

$$(\Omega S)D(S'\Omega) = \Omega(SDS')\Omega = \Omega A \Omega$$

where D is a diagonal matrix containing the eigenvalues of A . Furthermore, the eigenvectors in $span(V)$ are independent of λ :

$$\Omega A \Omega = \Omega \Sigma \Omega + \lambda \widehat{\Omega R \Omega} = \Omega \Sigma \Omega$$

Thus, the eigenvectors and inverted eigenvalues of $\Omega \Sigma \Omega$ are the same as the nonzero eigenvectors and eigenvalues in $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\Sigma + \lambda R)^{-1}$, which concludes the proof.

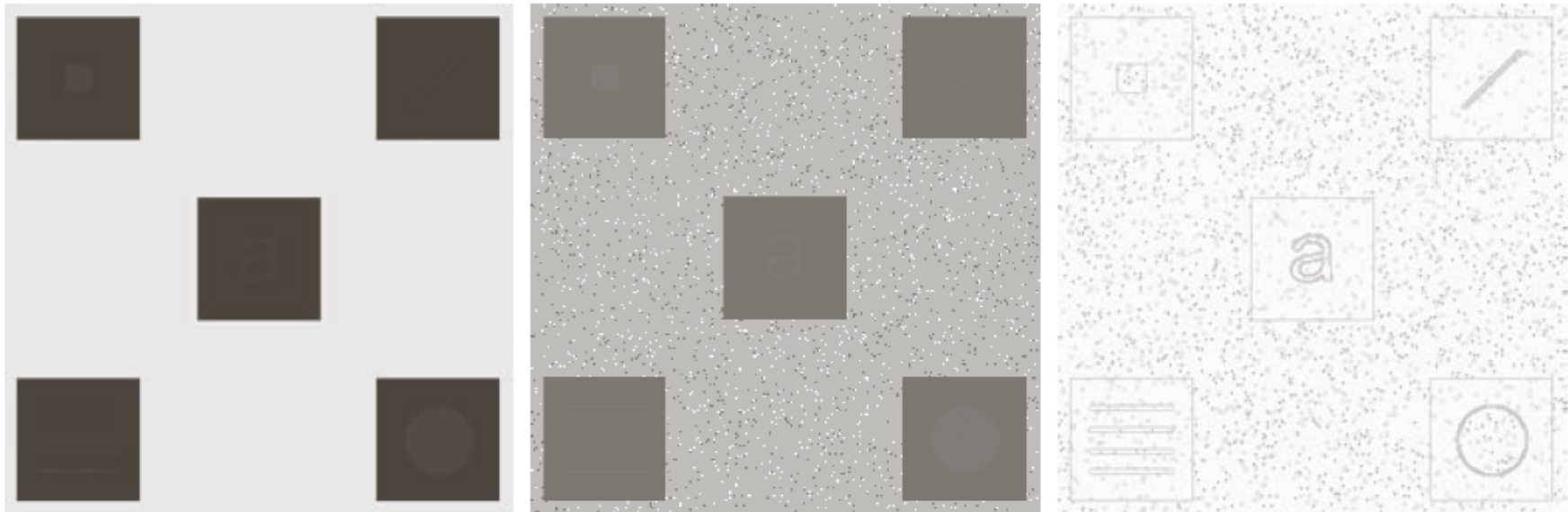
A.3 The $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$ ratio in QDA

We know, from Appendices A.1 and A.2, that our proposition is correct for the second term in (IV-1), the Mahalanobis distance. In LDA this is all that is needed to show equality of the classifiers, but in QDA we must also show that the ratio $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$ for any two classes i and j , or the differences in their log values, becomes equal in the regularized and the feature-reduced case. That is, letting Σ_{ik} denote class i 's $k \times k$ sample covariance matrix, we must show that (choosing classes 1 and 2 for notational simplicity)

$$\frac{|\Sigma_1 + \lambda R|}{|\Sigma_2 + \lambda R|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{|\Sigma_{k1}|}{|\Sigma_{k2}|}$$

Lokal endring av
middelerdi og kontrast

Lokal GTT – Eksempel II

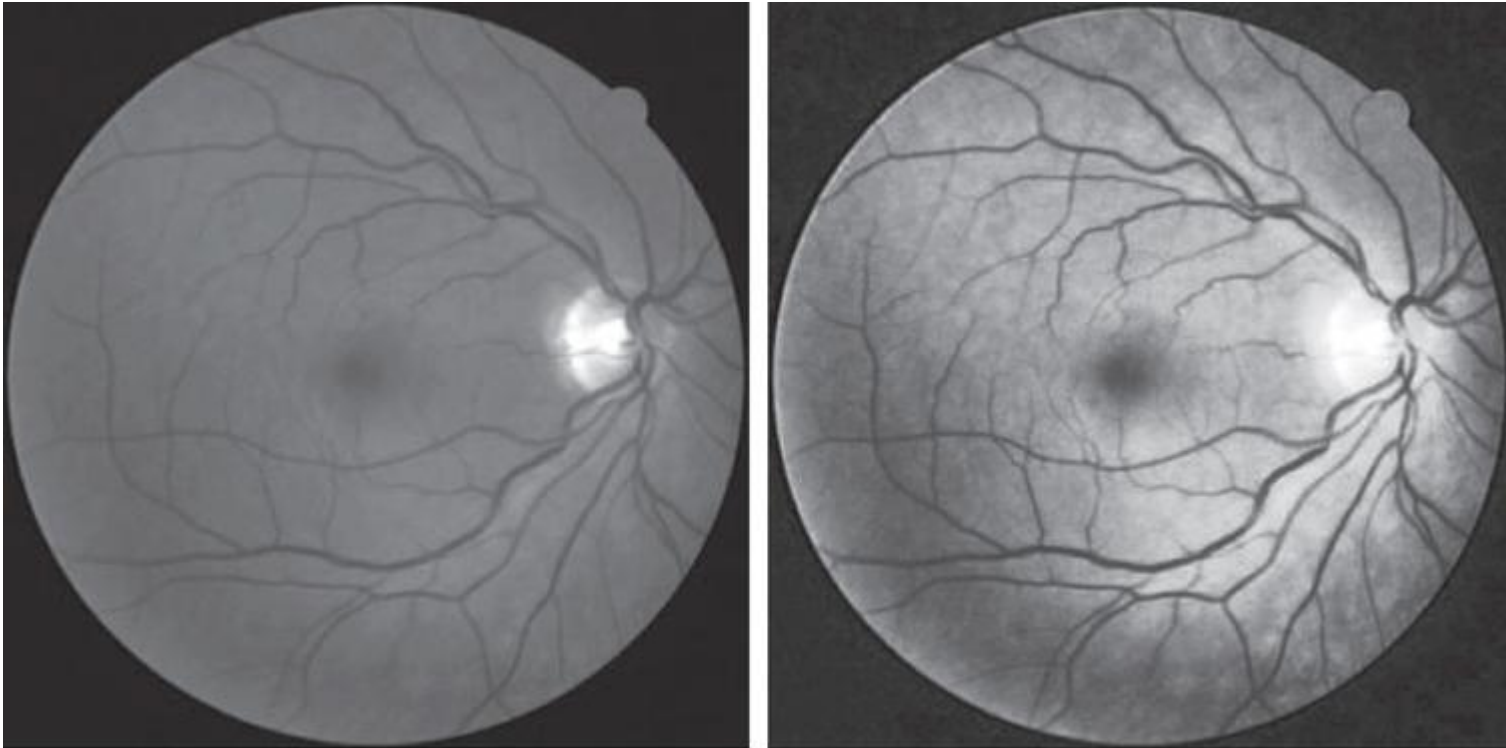


a b c

FIGURE 3.26 (a) Original image. (b) Result of global histogram equalization. (c) Result of local histogram equalization applied to (a), using a neighborhood of size 3×3 .

(Fra DIP, Gonzales & Woods)

Lokal GTT – Eksempel III



(iospress.com / Jiang et al. 2015)

Lokal GTT III/III

- Vi er ofte nødt til å begrense «endringstiljen» til de lokale kontrastendringstransformene
 - Innføre brukerstyrte parametre



Input



«Ubegrenset»
lokal histogramutjevning

IN2070



«Ubegrenset»
lokal lineær strekking

Lokal GTT i praksis | lineær strekking I/II

- Ønsker vi en lokal GTT som også gir en ny middelvei μ_0 , så bruker vi transformen

$$g_2(x, y) = \mu_0 + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy}}$$

- Men dette vil ofte gi et "flatt" bilde
- Introduserer parameteren β , styrer hvor kraftig vi endrer μ :
 - $\beta = 0 \rightarrow$ uforandret middelvei over hele bildet
 - $\beta = 1 \rightarrow$ lik middelvei over hele bildet

$$g_3(x, y) = \beta\mu_0 + (1 - \beta)\mu_{xy} + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy}}$$

Lokal GTT i praksis | lineær strekking II/II

- Hva er karakteristisk for homogene områder i et bilde?

$$\sigma_{xy} = 0$$

- Her får vi problemer, fordi

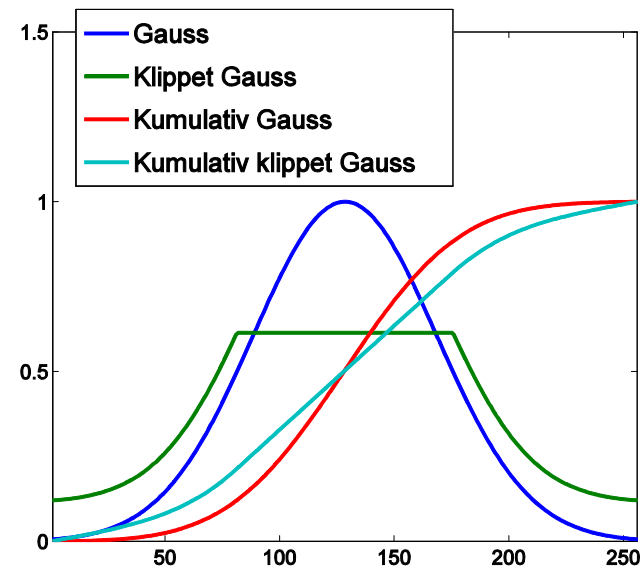
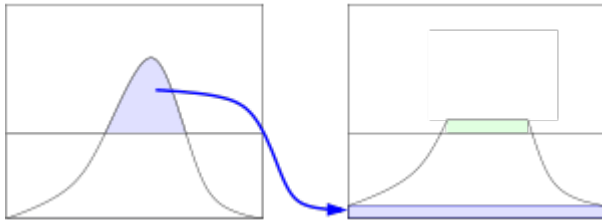
$$g_3(x, y) = \dots + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy}} \quad \leftarrow$$

- Innfører parameteren δ :

$$g_4(x, y) = \beta\mu_0 + (1 - \beta)\mu_{xy} \\ + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy} + \delta\sigma_0}$$

Lokal GTT i praksis | histogramutjevning

- En mye brukt variant: CLAHE (contrast limited adaptive histogram equalization)
- Her «begrenser» vi kontrastendringen ved å klippe histogrammet før vi regner ut det kumulative histogrammet.
- Dette gir en transformasjon med lavere stigningstall, som gir mindre kontrastendring



Lokal GTT - Implementasjon

- Lokal kontrastendring er *regnekrevende*
 - Histogramspesifikasjon: Beregne nytt lokalt kumulativt histogram for hver piksel
 - Lineær transform: Beregne ny μ og σ sigma for hver piksel
- Benytt overlappet mellom vinduene i det man flytter til neste piksel
 - Løpende oppdatere histogrammet, eller μ og σ
- Eller, gjør en approksimasjon: Beregn kun transform for hvert n-te piksel, og interpoler mellom transformene

Sentrale temaer i dag

- Histogramtransformasjoner
 - Histogramutjevning
 - Histogramtilpasning
- Standardisering av histogram for billedserier
 - Fjerne effekten av variasjoner i avbildningsforhold (døgnvariasjon, lysforhold, sensorbytte, støv etc)
 - Ikke lurt med histogramtilpasning hvis histogram-formen inneholder informasjon som (senere) skal/kan benyttes
 - Alternativ til standardisering av bilder med lineær transform
- Lokal gråtone-transformasjon
 - Samme kontrast og «lyshet» over hele bildet
 - Beregn og benytt transformene på lokalt vindu rundt hver piksel
 - Kontrastbegrensning (både for lineær strekking og histogramutjevning)
 - Regnekrevende