

# IN2070 - Fourier 1

---

10. mars 2021

- Sinus-funksjon i 1D og 2D
- 2D diskret Fouriertransformasjon (DFT)
- Neste uke:
  - Konvolusjonsteoremet
  - Filtre og filtrering i frekvensdomenet
  - Vindusfunksjoner

- Et gråtonebilde kan representeres ved:
  - Typisk: Matrise av gråtoneintensiteter

- Et gråtonebilde kan representeres ved:
  - Typisk: Matrise av gråtoneintensiteter
  - Fourier: Vektet sum av sinuser og cosinuser med ulike frekvens og orientering

- Et gråtonebilde kan representeres ved:
  - Typisk: Matrise av gråtoneintensiteter
  - Fourier: Vektet sum av sinuser og cosinuser med ulik *frekvens* og *orientering*



- Skifte av representasjon kalles ofte et *basis-skifte*

Hvorfor ønsker vi å skifte basis?

Hvorfor ønsker vi å skifte basis?

- Analyse:
  - Skarphet, orienteringsdominerte objekter, o.l
  - Fjerne/dempe periodisk støy
  - Kompresjon

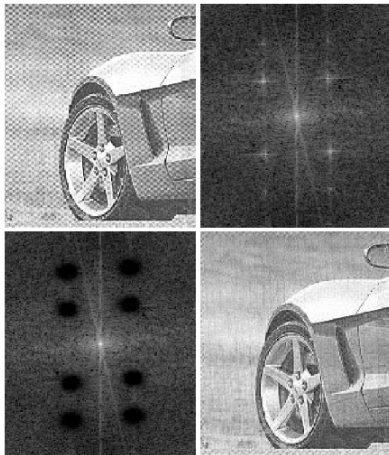
Hvorfor ønsker vi å skifte basis?

- Analyse:
  - Skarphet, orienteringsdominerte objekter, o.l
  - Fjerne/dempe periodisk støy
  - Kompresjon
- Egenskapsuttrekning, f.eks tekstur

# Introduksjon 2

Hvorfor ønsker vi å skifte basis?

- Analyse:
  - Skarphet, orienteringsdominerte objekter, o.l
  - Fjerne/dempe periodisk støy
  - Kompresjon
- Egenskapsuttrekning, f.eks tekstur
- Neste uke:
  - Analyse og design av lineære filtre
  - Raskere implementasjon av større konvolusjonsfiltre



Fjerning/demping av periodisk støy, Figure 4.64 i DIP



## Funksjonen $\sin(\theta)$

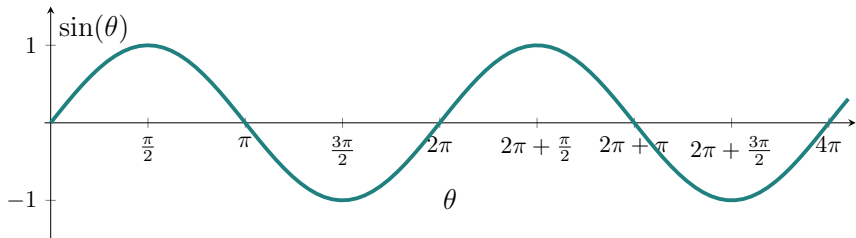
Funksjonen  $\sin(\theta)$ :

- Svinger mellom 1 og -1 når  $\theta$  varierer mellom 0 og  $2\pi$

# Funksjonen $\sin(\theta)$

Funksjonen  $\sin(\theta)$ :

- Svinger mellom 1 og -1 når  $\theta$  varierer mellom 0 og  $2\pi$
- Svinger på samme måte når  $\theta$  varierer mellom  $2\pi$  og  $4\pi$ ,  $4\pi$  og  $6\pi$  osv

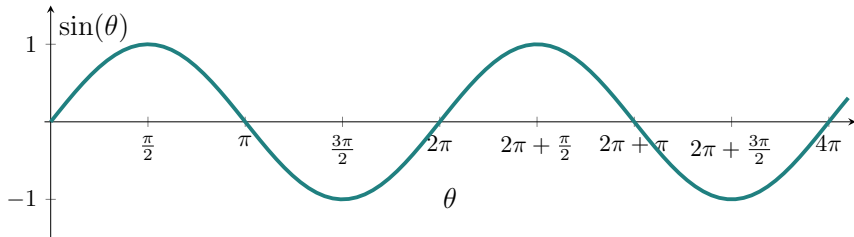


# Funksjonen $\sin(\theta)$

Funksjonen  $\sin(\theta)$ :

- Svinger mellom 1 og -1 når  $\theta$  varierer mellom 0 og  $2\pi$
- Svinger på samme måte når  $\theta$  varierer mellom  $2\pi$  og  $4\pi$ ,  $4\pi$  og  $6\pi$  osv

→ Funksjonen er **periodisk**



$$y[i] = A \sin \left( 2\pi \frac{ui}{N} + \phi \right)$$

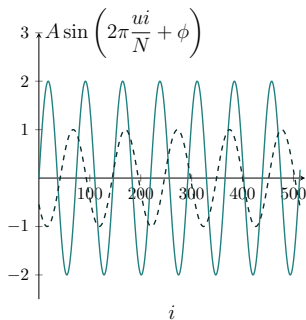
$N$  : Antall sampler

$u$  : Antall hele perioder

$\phi$  : Horizontal forskyving, *fase*

$A$  : Amplitude

# Diskret sinus/cosinus i 1D



$$y[i] = A \sin\left(2\pi \frac{ui}{N} + \phi\right)$$

$N$  : Antall sampler

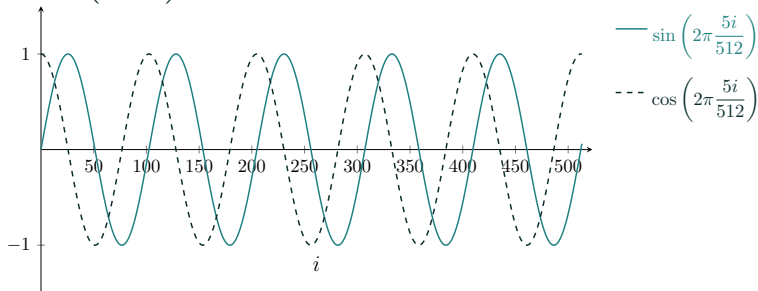
$u$  : Antall hele perioder

$\phi$  : Horizontal forskyving, *fase*

$A$  : Amplitude

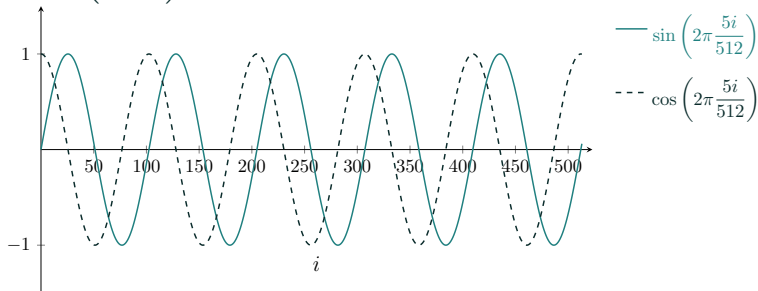
## Hva skiller $\sin(\theta)$ fra $\cos(\theta)$ ?

- $\sin\left(2\pi\frac{ui}{N}\right)$ : starter på 0
- $\cos\left(2\pi\frac{ui}{N}\right)$ : starter på 1



## Hva skiller $\sin(\theta)$ fra $\cos(\theta)$ ?

- $\sin\left(2\pi\frac{ui}{N}\right)$ : starter på 0
- $\cos\left(2\pi\frac{ui}{N}\right)$ : starter på 1



$$\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

Bare startpunktet som er forskjellig!

## Legge sammen sin og cos

$$A_1 \sin(\theta) + A_2 \cos(\theta) = A \sin(\theta + \phi)$$

der  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  og  $\phi = \text{atan}(A_2, A_1)$



## Legge sammen sin og cos

$$A_1 \sin(\theta) + A_2 \cos(\theta) = A \sin(\theta + \phi)$$

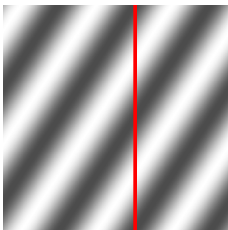
der  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$  og  $\phi = \text{atan}(A_2, A_1)$

→ Får en sin-funksjon med samme frekvens, men endret amplitude og fase

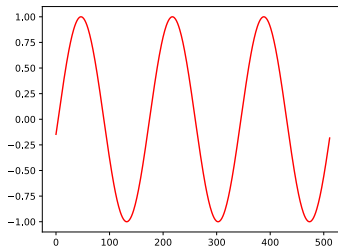
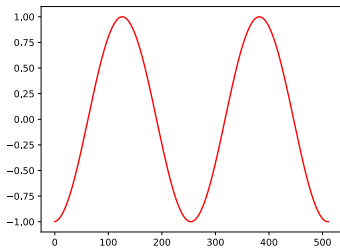
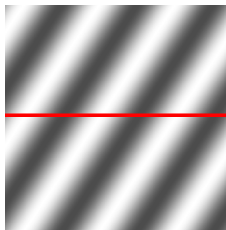
Kan med dette si at enhver sinus-funksjon med gitt frekvens kan dannes ved å legge sammen en vektet sinus-funksjon og vektet cosinus-funksjon med samme frekvens !

# Sinus-funksjoner i 2D

Vertikal “kutt”



Horizontal “kutt”



$$f(x, y) = A \sin \left( 2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) + \phi \right)$$

$A$  : Amplitude

$u$  : Vertikal frekvens

$v$  : Horizontal frekvens

$\phi$  : Faseforskyving

$$f(x, y) = A \sin \left( 2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) + \phi \right)$$

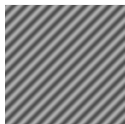
- $A$ : Amplitude
- $u$ : Vertikal frekvens
- $v$ : Horizontal frekvens
- $\phi$ : Faseforskyving



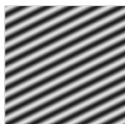
$$A = 50, \\ u = 0, \\ v = 10$$



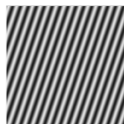
$$A = 20, \\ u = 10, \\ v = 0$$



$$A = 50, \\ u = 10, \\ v = 5$$

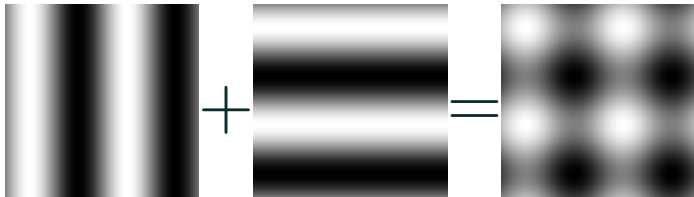


$$A = 100, \\ u = 10, \\ v = 5$$

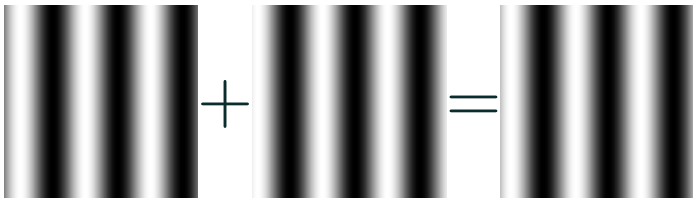


$$A = 100, \\ u = 5, \\ v = 15$$

## Eksempel: Sum av 2D sinusfunksjoner



## Eksempel: Sum av 2D sinusfunksjoner



## Basisbilder: Matriser med en 1-er og resten 0

Typisk represjontasjon av et gråtonebilde:

Vektet sum av matriser med kun ett element lik 1 og resten 0

# Basisbilder: Matriser med en 1-er og resten 0

Typisk represjontasjon av et gråtonebilde:

Vektet sum av matriser med kun ett element lik 1 og resten 0

1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	1	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	1
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	0	0
1	0	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	1
1	0	0	0

← Eksempel på basisbilder  
for  $4 \times 4$  bilder



# Basisbilder: Matriser med en 1-er og resten 0

Typisk represjontasjon av et gråtonebilde:

Vektet sum av matriser med kun ett element lik 1 og resten 0

1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1

← Eksempel på basisbilder  
for  $4 \times 4$  bilder

Eksempel:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots + 7 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

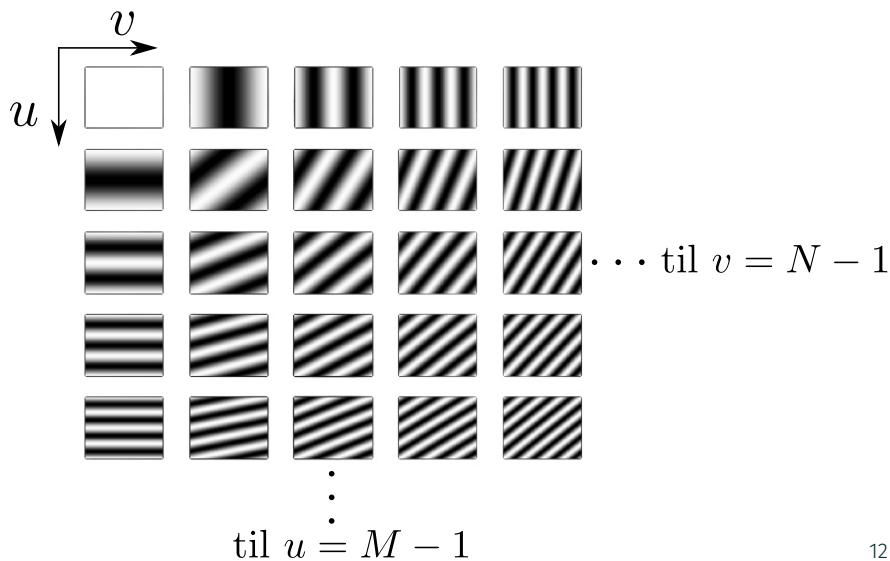
Digitale gråtonebilder av størrelse  $M \times N$  kan representeres ved en vektet sum av disse  $M \times N$  sinus- og cosinus-bildene:

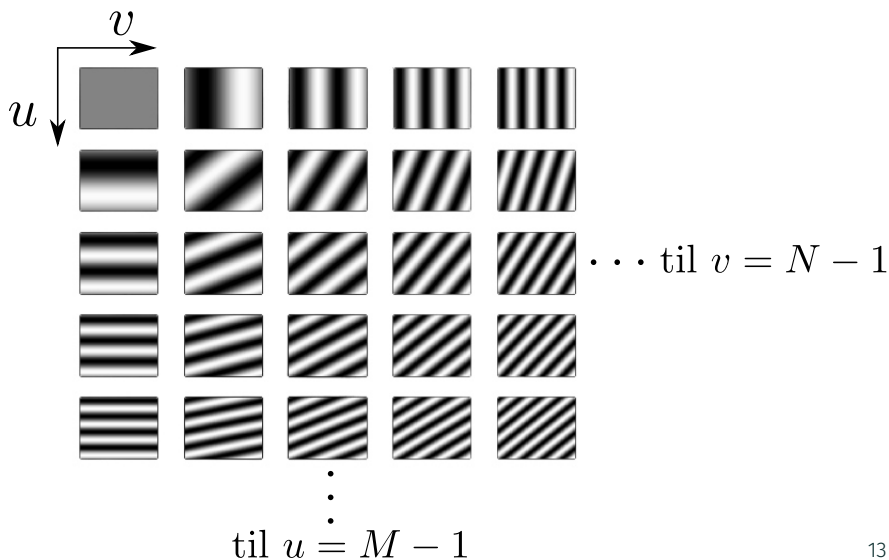
$$\cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right) \quad \sin\left(-2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

for frekvensene

$$u = 0, 1, \dots, M - 1$$

$$v = 0, 1, \dots, N - 1$$





## Finne bidraget fra et gitt basisbilde

$$\text{sum} \left( \begin{array}{c} \text{[Image of a silver car]} \\ \text{[Image of a black square with a white pixel]} \end{array} \right) \circledast \approx \begin{array}{l} \text{pikselverdi til} \\ \text{bakre del av bil} \end{array}$$

# Finne bidraget fra et gitt basisbilde

$$\begin{aligned} \text{sum} \left( \begin{array}{c} \text{[Car Image]} \\ \text{[Car Image]} \end{array} \odot \begin{array}{c} \text{[Black Image with White Pixel]} \\ \text{[Diagonal Stripes Image]} \end{array} \right) \approx \begin{array}{l} \text{pikselverdi til} \\ \text{bakre del av bil} \end{array} \end{aligned}$$

The diagram illustrates the process of finding the contribution of a specific basis image to a given input image. It shows two rows of operations. The top row shows the input image (a car) being element-wise multiplied (indicated by the  $\odot$  symbol) by a basis image consisting of a single white pixel on a black background. The bottom row shows the same input image being element-wise multiplied by a basis image consisting of diagonal black and white stripes. The result of these operations is approximately the pixel value of the rear part of the car.

## Finne bidraget fra et gitt basisbilde

$$\text{sum} \left( \begin{array}{c} \text{Bilde} \\ \odot \\ \text{Basisbilde} \end{array} \right) \approx \text{pikselverdi til bakre del av bil}$$
  
$$\text{sum} \left( \begin{array}{c} \text{Bilde} \\ \odot \\ \text{Basisbilde} \end{array} \right)$$

The diagram illustrates the process of finding the contribution of a specific basis image to a target image. It shows two rows of operations. The top row shows a grayscale image of a car's rear quarter (the 'Bilde') being element-wise multiplied (indicated by  $\odot$ ) with a basis image consisting of a single white pixel on a black background. The result is approximately the pixel value of the rear part of the car. The bottom row shows the same car image multiplied by a basis image consisting of diagonal black and white stripes.

Vi finner bidragene ved å ta et indreprodukt mellom basisbildene og bildet

# Symmetri i basisbildene

Cosinus



Sinus





# Symmetri i basisbildene

Cosinus



Sinus



Antisymmetri i sinus

- Lar  $R(u, v)$  være cosinus-bidrag og  $I(u, v)$  sinus-bidrag med frekvens  $u$  og  $v$  til et bilde
- Fasen finner vi ved

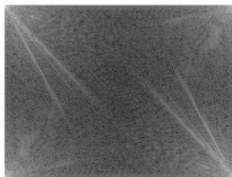
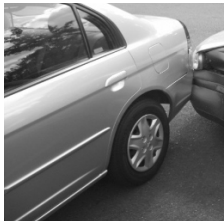
$$\phi(u, v) = \text{atan} \left( \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right)$$

- ... og amplitude ved

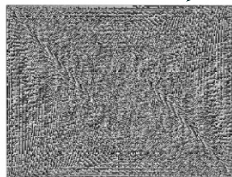
$$A(u, v) = \sqrt{R(u, v)^2 + I(u, v)^2}$$

# Eksempel: Amplitude og fase

Innbilde



Log av amplituden, **spekteret**  
Forteller noe om hvilke  
frekvenser bildet inneholder



Fasen  
Inneholder viktig informasjon!

- Representere resultatet ved komplekse tall

- Representere resultatet ved komplekse tall
- Cosinus-bidragene er i realdelen og sinus-bidragene er i imaginærdelen

- Representere resultatet ved komplekse tall
- Cosinus-bidragene er i realdelen og sinus-bidragene er i imaginærdelen
- Bildet i den nye basisen blir da

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v), \quad j = \sqrt{-1}$$

- Representere resultatet ved komplekse tall
- Cosinus-bidragene er i realdelen og sinus-bidragene er i imaginærdelen
- Bildet i den nye basisen blir da

$$F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v), \quad j = \sqrt{-1}$$

- Amplitude: modulus (lengde i det komplekse planet)
- Fase: argument (vinkel i det komplekse planet)

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$



## 2D diskret Fouriertransformasjon (DFT)

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

Eulers formel:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

## 2D diskret Fouriertransformasjon (DFT)

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

Eulers formel:

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

Ved å bruke formelen, får vi sin- og cos-basisen vi så på tidligere:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \left( \cos \left( 2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right) + j \sin \left( -2\pi \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right) \right)$$

## 2D diskret Fouriertransformasjon (DFT): Invers transformasjon

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

Kan også gå tilbake fra Fourier-transformert bilde til opprinnelig representasjon:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

- $F(u, v)$  er periodisk:

$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$$

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

- $F(u, v)$  er periodisk:

$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$$

- Må også anta at bildet er periodisk for at inverstransformasjon skal holde:

$$f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$$

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

- $F(u, v)$  er periodisk:

$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$$

- Må også anta at bildet er periodisk for at inverstransformasjon skal holde:

$$f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$$

- Hvis  $f(x, y)$  er reell, er  $|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

$$\cdot F(0, 0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

- $F(0, 0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$
- Shift-teoremet:

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-2\pi j \left( \frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N} \right)}$$



2D Fourier - transformasjon:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi j \left( \frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right)}$$

- $F(0, 0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$
- Shift-teoremet:

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-2\pi j \left( \frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N} \right)}$$

- 2D DFT er separabelt i to 1D DFT  
→ Nødvendig, sammen med FFT-algoritmen, for å effektivt utføre transformasjonen av bilder av viss størrelse

## Framvisning av amplitudespekteret

- Vanlig å forskyve spekteret slik at origo,  $(u = 0, v = 0)$ , ligger midt i bildet
- Går fint å gjøre dette siden  $F(u, v)$  er periodisk

## Framvisning av amplitudespekteret

- Vanlig å forskyve spekteret slik at origo,  $(u = 0, v = 0)$ , ligger midt i bildet
- Går fint å gjøre dette siden  $F(u, v)$  er periodisk

Vi bytter kvadranter

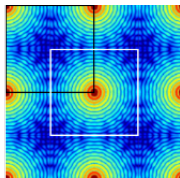
(pre-multipliserer innbildet med  $(-1)^{x+y}$  for alle  $(x, y)$ )

Innbilde



Billedomenet

$|F(u, v)|$



Frekvens- eller Fourierdomenet  
Spekteret til bildet

- $|F(u, v)|$  kan ha høye verdier med stor avstand mellom verdiene!

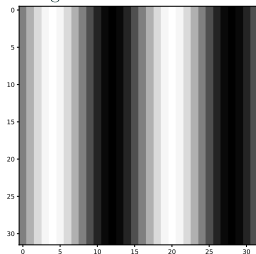
- $|F(u, v)|$  kan ha høye verdier med stor avstand mellom verdiene!
- Vanlig å ta en logaritmisk transformasjon

- $|F(u, v)|$  kan ha høye verdier med stor avstand mellom verdiene!
- Vanlig å ta en logaritmisk transformasjon
  - Vi er mer interessert i størrelsesforhold i amplitude mellom frekvenser

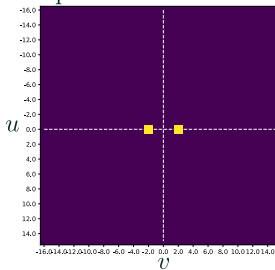
- $|F(u, v)|$  kan ha høye verdier med stor avstand mellom verdiene!
- Vanlig å ta en logaritmisk transformasjon
  - Vi er mer interessert i størrelsesforhold i amplitude mellom frekvenser
  - $g(u, v) = \log(|F(u, v)| + 1)$ , som eventuelt skaleres til å ha gråtoner mellom 0 og 255

# Eksempel: Fourier-transformasjon av sinus-bilder

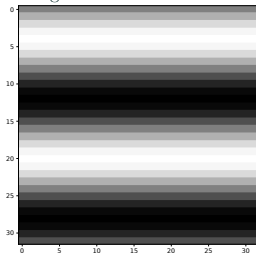
Sinus med vertikal frekvens  $u = 0$   
og horisontal frekvens  $v = 2$



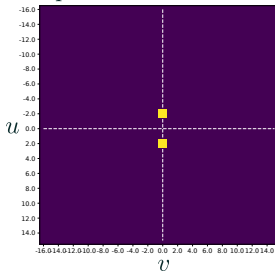
Spekter



Sinus med vertikal frekvens  $u = 2$   
og horisontal frekvens  $v = 0$



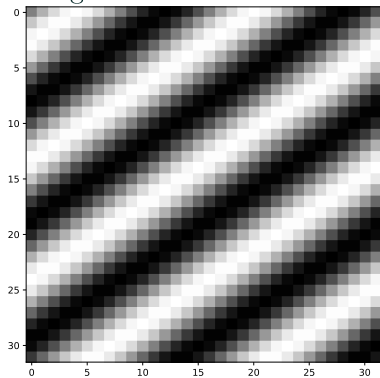
Spekter



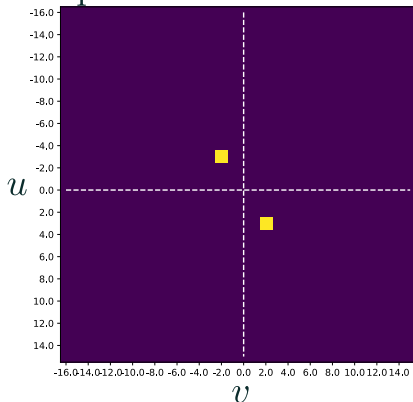


# Eksempel: Fourier-transformasjon av skrå sinus-bilder

Sinus med vertikal frekvens  $u = 3$   
og horisontal frekvens  $v = 2$

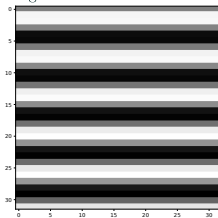


Spekter

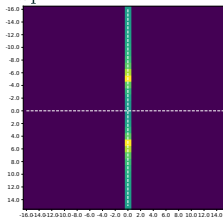


# Eksempel: Diskontinuitet

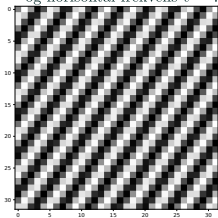
Sinus med vertikal frekvens  $u = 5.3$   
og horisontal frekvens  $v = 0$



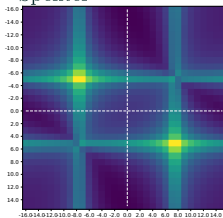
Spekter



Sinus med vertikal frekvens  $u = 5.3$   
og horisontal frekvens  $v = 7.5$

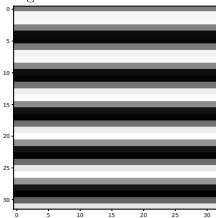


Spekter

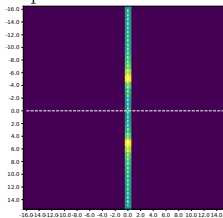


# Eksempel: Diskontinuitet

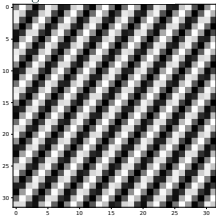
Sinus med vertikal frekvens  $u = 5.3$   
og horisontal frekvens  $v = 0$



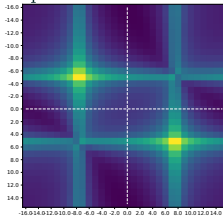
Spekter



Sinus med vertikal frekvens  $u = 5.3$   
og horisontal frekvens  $v = 7.5$



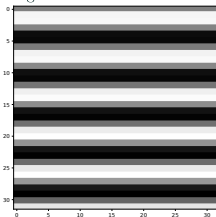
Spekter



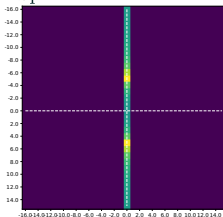
Husk: bildet antas å være periodisk!

# Eksempel: Diskontinuitet

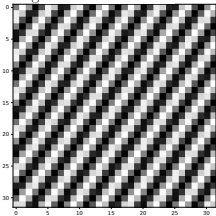
Sinus med vertikal frekvens  $u = 5.3$   
og horisontal frekvens  $v = 0$



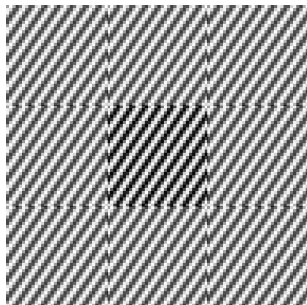
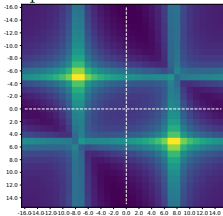
Spekter



Sinus med vertikal frekvens  $u = 5.3$   
og horisontal frekvens  $v = 7.5$



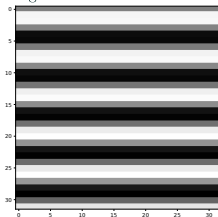
Spekter



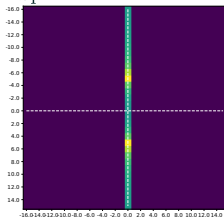
Husk: bildet antas å være periodisk!

# Eksempel: Diskontinuitet

Sinus med vertikal frekvens  $u = 5.3$   
og horisontal frekvens  $v = 0$

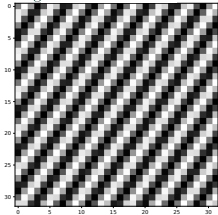


Spekter

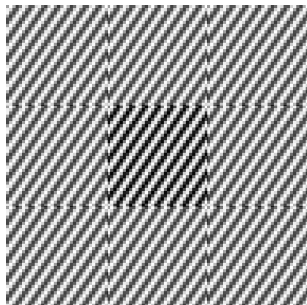
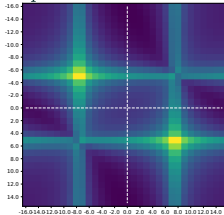


Diskontinuiteter i bildene på grunn  
av implisitt periodisitet!

Sinus med vertikal frekvens  $u = 5.3$   
og horisontal frekvens  $v = 7.5$



Spekter



Husk: bildet antas å være periodisk!

# Eksempel: Vanlige objektformer

Examples of the Fourier transform for other simple shapes are shown be

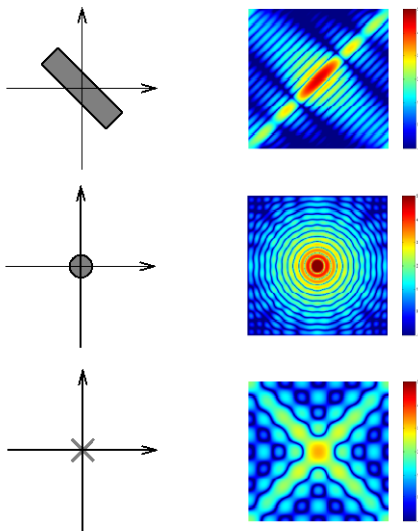
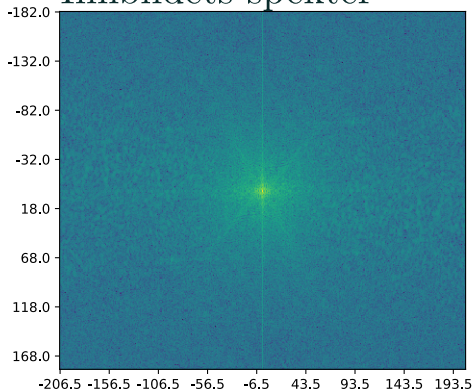


Figure 7-4: Fourier Transforms of Some Simple Shapes

## Innbilde



## Innbildets spekter

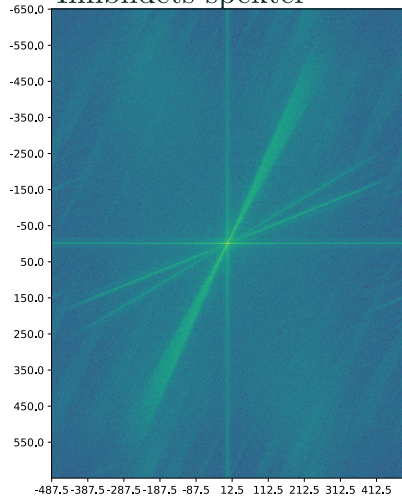


# Eksempel: Retningsdominert bilde

Innbilde



Innbildets spekter



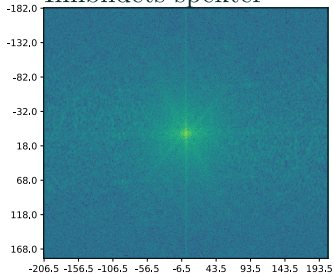


# Eksempel: Lav oppløsning og få detaljer

Innbilde



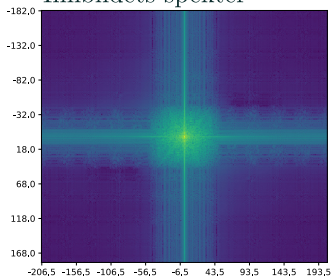
Innbildets spekter



Innbilde



Innbildets spekter



- Vanligvis størst bidrag i spekteret for lave verdier av  $u$  og  $v$
- Bidrag langs  $u$ - og  $v$ -aksen fordi bildet er implisitt periodisk og har derfor diskontinuitet langs kantene
- Linjestructurer i en gitt retning i billedomenet har linjestructur normalt på retningen i Fourierdomenet

## Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffisienter er ulik 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet

# Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffisienter er ulik 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
  - Færre sinusfunksjoner
  - Smalere bånd i Fourier-domenet



Bilde    Spekter



# Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarende sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffisienter er ulike 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
  - Færre sinusfunksjoner
  - Smalere bånd i Fourier-domenet
- Generelt,



Bilde    Spekter



# Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarer sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffisienter er ulik 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
  - Færre sinusfunksjoner
  - Smalere bånd i Fourier-domenet
- Generelt,
  - Smal struktur i billedomenet: Bred struktur i Fourier-domenet



Bilde    Spekter



# Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarende sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffisienter er ulike 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
  - Færre sinusfunksjoner
  - Smalere bånd i Fourier-domenet
- Generelt,
  - Smal struktur i bildedomenet: Bred struktur i Fourier-domenet
  - Bred struktur i bildedomenet: Smal struktur i Fourier-domenet



Bilde    Spekter



# Enda fler observasjoner

- Skarp kant
  - Tilsvarende sum av mange sinusfunksjoner
  - Mange Fourierkoeffisienter er ulike 0
  - Bredt bånd i Fourier-domenet
- Uskarp kant
  - Færre sinusfunksjoner
  - Smalere bånd i Fourier-domenet
- Generelt,
  - Smal struktur i bildedomenet: Bred struktur i Fourier-domenet
  - Bred struktur i bildedomenet: Smal struktur i Fourier-domenet
  - Linjestruktur i retning  $\theta$  i bildedomenet: Linjestruktur normalt på  $(\theta + 90^\circ)$  i Fourier-domenet

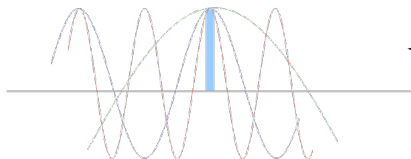


Bilde    Spekter

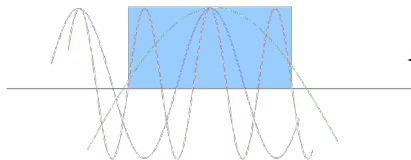




# Intuisjon: form i bildedomenet og i frekvensdomenet



← Høyt utslag på  
alle tre frekvensene



← Høyt utslag på  
kun på laveste frekvens

- Beregning av  $F(u, v)$  for én  $(u, v)$ :  $\mathcal{O}(M \times N)$

- Beregning av  $F(u, v)$  for én  $(u, v)$ :  $\mathcal{O}(M \times N)$
- Beregning av  $F(u, v)$  for hele bildet:  $\mathcal{O}\left((M \times N)^2\right)$

- Beregning av  $F(u, v)$  for én  $(u, v)$ :  $\mathcal{O}(M \times N)$
- Beregning av  $F(u, v)$  for hele bildet:  $\mathcal{O}\left((M \times N)^2\right)$
- 2D Fast Fouriertransform (2D FFT):
  - Benytter at Fouriertransformasjonen er separabel i to 1D transformasjoner

- Beregning av  $F(u, v)$  for én  $(u, v)$ :  $\mathcal{O}(M \times N)$
- Beregning av  $F(u, v)$  for hele bildet:  $\mathcal{O}\left((M \times N)^2\right)$
- 2D Fast Fouriertransform (2D FFT):
  - Benytter at Fouriertransformasjonen er separabel i to 1D transformasjoner
  - Bruker hele bilder eller delbilder med størrelse  $2^k$ ,  $k$  heltall

- Beregning av  $F(u, v)$  for én  $(u, v)$ :  $\mathcal{O}(M \times N)$
- Beregning av  $F(u, v)$  for hele bildet:  $\mathcal{O}\left((M \times N)^2\right)$
- 2D Fast Fouriertransform (2D FFT):
  - Benytter at Fouriertransformasjonen er separabel i to 1D transformasjoner
  - Bruker hele bilder eller delbilder med størrelse  $2^k$ ,  $k$  heltall
  - Har orden  $\mathcal{O}((M \times N) \times \log_2(M \times N))$

Beregn DFT og invers DFT:

$$F = \text{fft2}(f)$$

$$f = \text{ifft2}(F)$$

Beregn DFT og invers DFT:

$$F = \text{fft2}(f)$$

$$f = \text{ifft2}(F)$$

Hent ut real- og imaginærdel:

$$F_r = \text{real}(F)$$

$$F_i = \text{imag}(F)$$



## Fourier-transformasjon

Beregn DFT og invers DFT:

$$F = \text{fft2}(f)$$

$$f = \text{ifft2}(F)$$

Hent ut real- og imaginærdel:

$$F_r = \text{real}(F)$$

$$F_i = \text{imag}(F)$$

Hent ut spekter og fase:

$$F_s = \text{abs}(F)$$

$$F_i = \text{angle}(F)$$

# Fourier-transformasjon

Beregn DFT og invers DFT:

$$F = \text{fft2}(f)$$

$$f = \text{ifft2}(F)$$

Hent ut real- og imaginær del:

$$F_r = \text{real}(F)$$

$$F_i = \text{imag}(F)$$

Hent ut spekter og fase:

$$F_s = \text{abs}(F)$$

$$F_i = \text{angle}(F)$$

Vis fram spekter ved bruk av `fftshift` for å flytte på kvadranter:

$$\text{imshow}(\text{fftshift}(\log(F) + 1))$$

# Oppsummering

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere  $A \sin(\theta + \phi)$  i en sin- og cos-komponent

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere  $A \sin(\theta + \phi)$  i en sin- og cos-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med cos- og sin-basisbilder

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere  $A \sin(\theta + \phi)$  i en sin- og cos-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med cos- og sin-basisbilder
  - Representasjon ved komplekse tall
    - cos- og sin-ledd som hhv. reell- og imaginær-komponent

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere  $A \sin(\theta + \phi)$  i en sin- og cos-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med cos- og sin-basisbilder
  - Representasjon ved komplekse tall
    - cos- og sin-ledd som hhv. reell- og imaginær-komponent
  - Implisitt periodisitet i bildet
    - Utslag i diskontinuitet, “ekstra” frekvenser

- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere  $A \sin(\theta + \phi)$  i en sin- og cos-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med cos- og sin-basisbilder
  - Representasjon ved komplekse tall
    - cos- og sin-ledd som hhv. reell- og imaginær-komponent
  - Implisitt periodisitet i bildet
    - Utslag i diskontinuitet, “ekstra” frekvenser
  - Fremvisning av spekteret  $|F(u, v)|$



- Sinusfunksjoner
  - Frekvens/periode
  - Amplitude
  - Fase
  - Dekomponere  $A \sin(\theta + \phi)$  i en sin- og cos-komponent
  - 1D og 2D varianter
- Diskret Fourier-transformasjon
  - Bilde beskrevet med cos- og sin-basisbilder
  - Representasjon ved komplekse tall
    - cos- og sin-ledd som hhv. reell- og imaginær-komponent
  - Implisitt periodisitet i bildet
    - Utslag i diskontinuitet, “ekstra” frekvenser
  - Fremvisning av spekteret  $|F(u, v)|$
  - Observasjoner