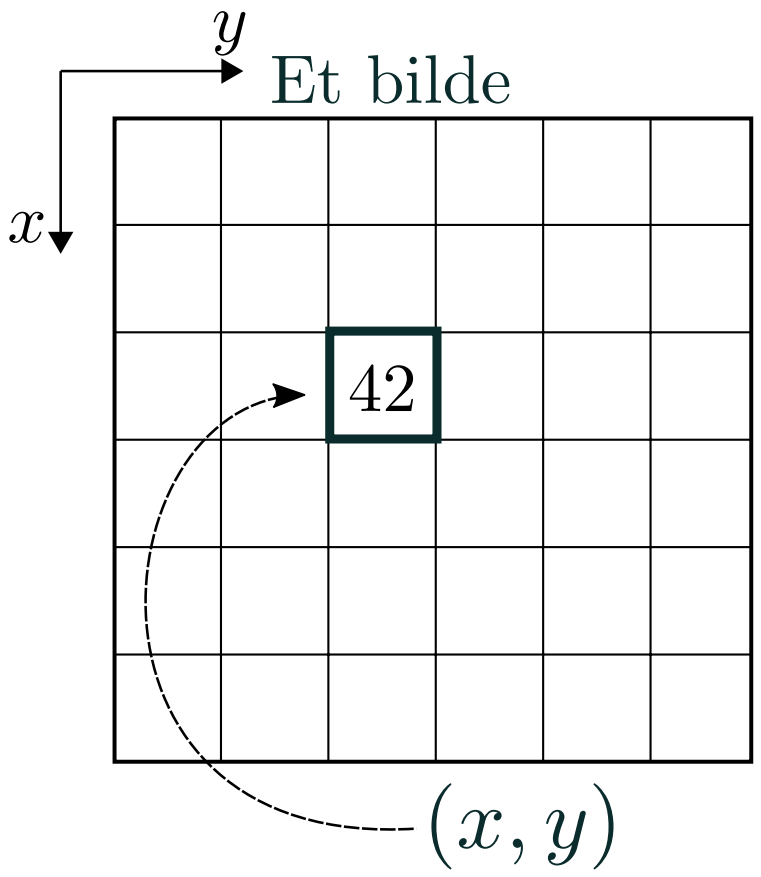
IN2070 - Geometriske operasjoner

27. januar 2021

- Affine transformasjoner
- Resampling og interpolasjon
- Samregistrering av bilder

Oppsummering: Hva et digitalt bilde er

- En matrise med verdier
- Hver piksel har en verdi og en koordinat (x, y)
- Øvre, venstre hjørne er ofte element med koordinat $(0, 0)$



Hva er en geometrisk operasjon?

- Endrer på posisjoner til piksler

Hva er en geometrisk operasjon?

- Endrer på posisjoner til piksler
- Posisjonen (x, y) til hvert piksel blir flyttet på gjennom transformasjonene T_x og T_y,

$$x' = T_x(x, y)$$
$$y' = T_y(x, y)$$

Hva er en geometrisk operasjon?

- Endrer på posisjoner til piksler
- Posisjonen (x, y) til hvert piksel blir flyttet på gjennom transformasjonene T_x og T_y,

$$x' = T_x(x, y)$$
$$y' = T_y(x, y)$$

- T_x og T_y er ofte polynomer

Anvendelser

- Forstørre deler av bildet for visuell inspeksjon (zoome)
- Rette opp for geometriske feil som oppstår under avbildning
  - Rotasjon
  - Fiskeøyelinse
  - Avbildning av terreng (radar/sonar)
  - Linsekorrigering
  - ...
- Samregistrering av bilder
  - ... fra ulike sensorer (f.eks CT, MR, ultralyd)
  - ... tatt på ulike tidspunkt / vinkler
  - ... kart i bestemt kartprojeksjon
  - ... f.eks i ansiktsgjenkjenning der ansiktene skal være på samme plass som et referansebilde
  - ...
- Spesialeffekter

Affine transformasjoner

- Transformasjon av koordinatene (x, y) til (x', y'),

$$x' = T_x(x, y)$$
$$y' = T_y(x, y)$$

Affine transformasjoner

- Transformasjon av koordinatene (x, y) til (x', y'),

$$x' = T_x(x, y)$$
$$y' = T_y(x, y)$$

- Affine transformasjoner beskrives ved

$$x' = a_0 x + a_1 y + a_2$$
$$y' = b_0 x + b_1 y + b_2$$

Affine transformasjoner

- Transformasjon av koordinatene (x, y) til (x', y'),

$$x' = T_x(x, y)$$
$$y' = T_y(x, y)$$

- Affine transformasjoner beskrives ved

$$x' = a_0 x + a_1 y + a_2$$
$$y' = b_0 x + b_1 y + b_2$$

- På matrise form:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Affine transformasjoner

- Transformasjon av koordinatene (x, y) til (x', y'),

$$x' = T_x(x, y)$$
$$y' = T_y(x, y)$$

- Affine transformasjoner beskrives ved

$$x' = a_0 x + a_1 y + a_2$$
$$y' = b_0 x + b_1 y + b_2$$

- På matrise form:

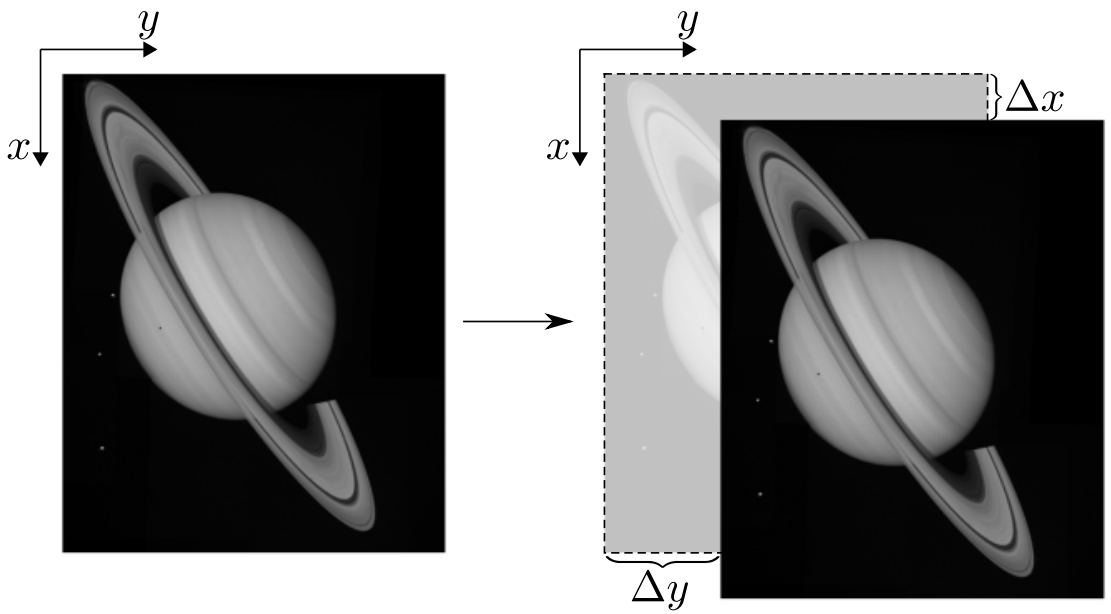
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Homogene koordinater}} \text{ eller } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Egenskaper til affine transformasjoner

- Rette linjer bevares
- Parallelle linjer forblir parallelle
- Lineær transformasjon + translasjon
- Kan uttrykkes ved matrisemultiplikasjon

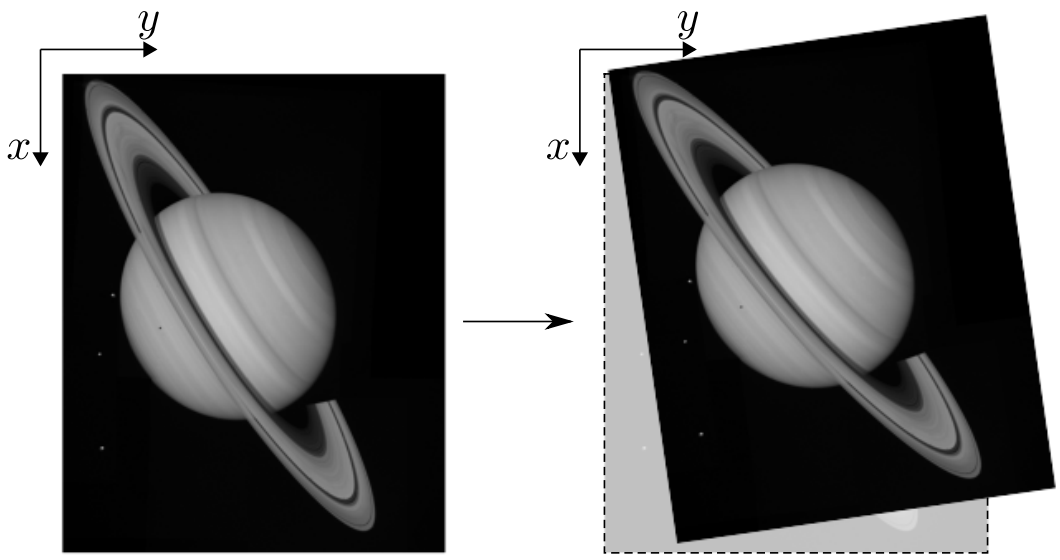
Eksempler på affine transformasjoner

- Affine transformasjoner:
  - Translasjon (forflytning)
  - Rotasjon
  - ”Shearing”
  - Refleksjon
  - Skalering



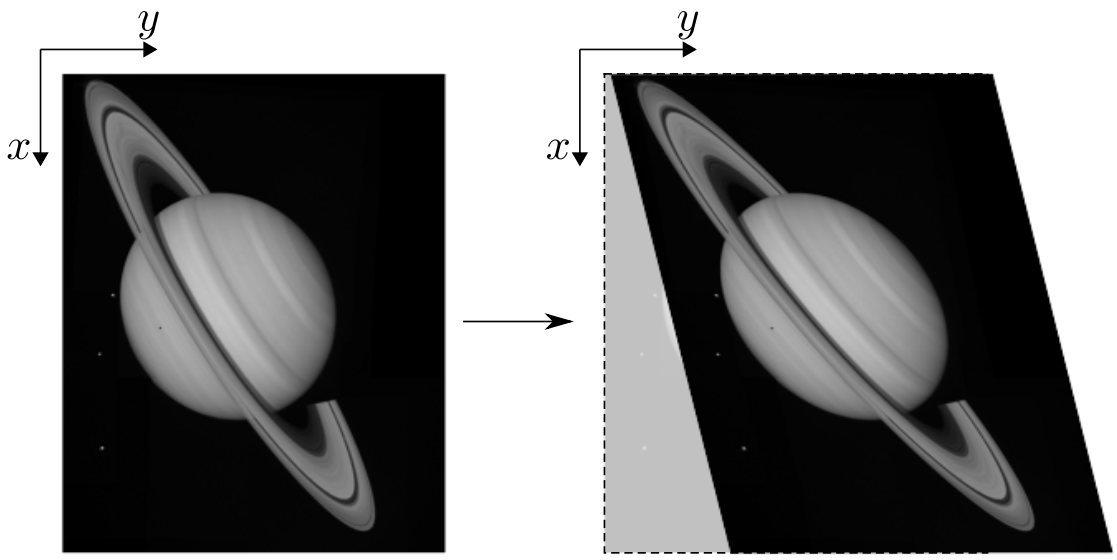
Eksempler på affine transformasjoner

- Affine transformasjoner:
  - Translasjon (forflytning)
  - Rotasjon
  - ”Shearing”
  - Refleksjon
  - Skalering



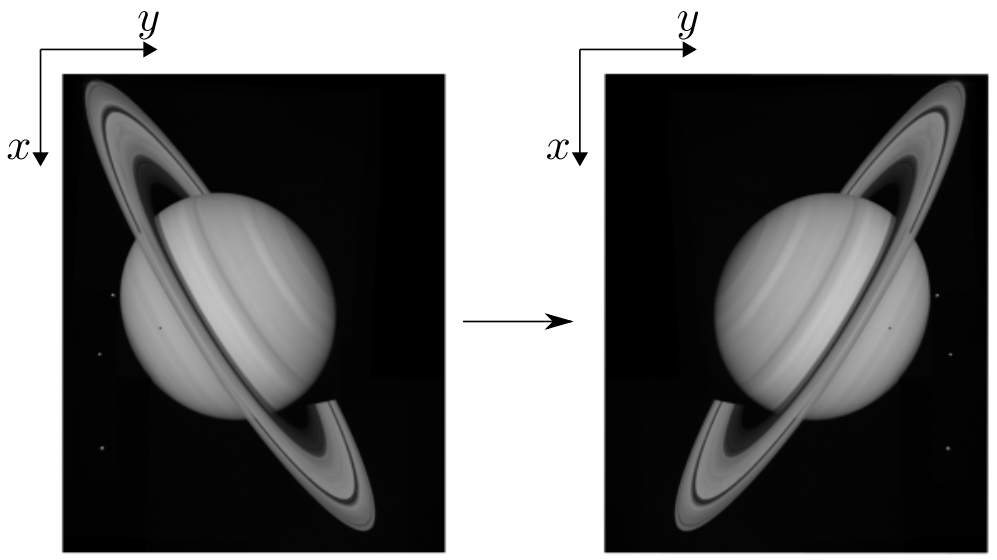
Eksempler på affine transformasjoner

- Affine transformasjoner:
  - Translasjon (forflytning)
  - Rotasjon
  - ”Shearing”
  - Refleksjon
  - Skalering



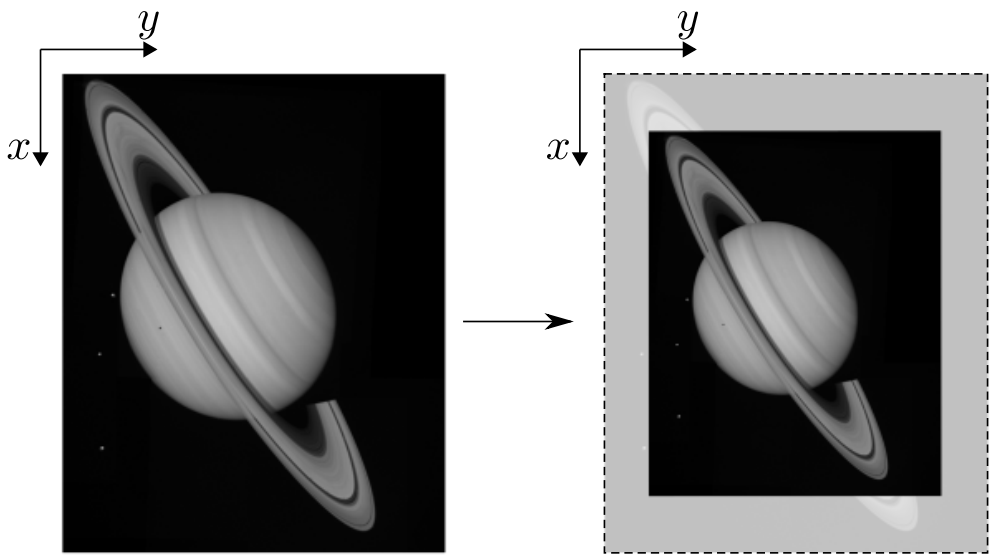
Eksempler på affine transformasjoner

- Affine transformasjoner:
  - Translasjon (forflytning)
  - Rotasjon
  - ”Shearing”
  - Refleksjon
  - Skalering



Eksempler på affine transformasjoner

- Affine transformasjoner:
  - Translasjon (forflytning)
  - Rotasjon
  - ”Shearing”
  - Refleksjon
  - Skalering



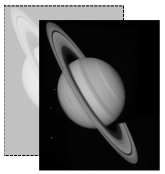
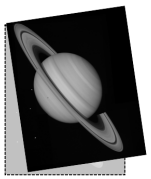
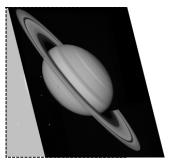
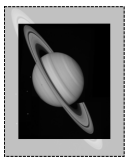
Eksempler på affine transformasjoner

- Affine transformasjoner:
  - Translasjon (forflytning)
  - Rotasjon
  - ”Shearing”
  - Refleksjon
  - Skalering

Disse transformasjonene kan kombineres til å gi andre affine transformasjoner!

Eksempler på affine transformasjoner

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformasjon	Transformasjonsmatrise	Uttrykk	Eksempel
Translasjon	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + \Delta x$ $y' = y + \Delta y$	
Rotasjon	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$ $y' = x\sin\theta + y\cos\theta$	
"Shear"	$\begin{bmatrix} 1 & s_y & 0 \\ s_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = x + s_y y$ $y' = y + s_x x$	
Skalering	$\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$x' = c_x x$ $y' = c_y y$	

Sammenslåing av affine transformasjoner

$$\begin{bmatrix} \text{translasjon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \text{rotasjon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \text{rotasjon} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \text{translasjon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \text{translasjon \& rotasjon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finne transformkoeffsientene

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

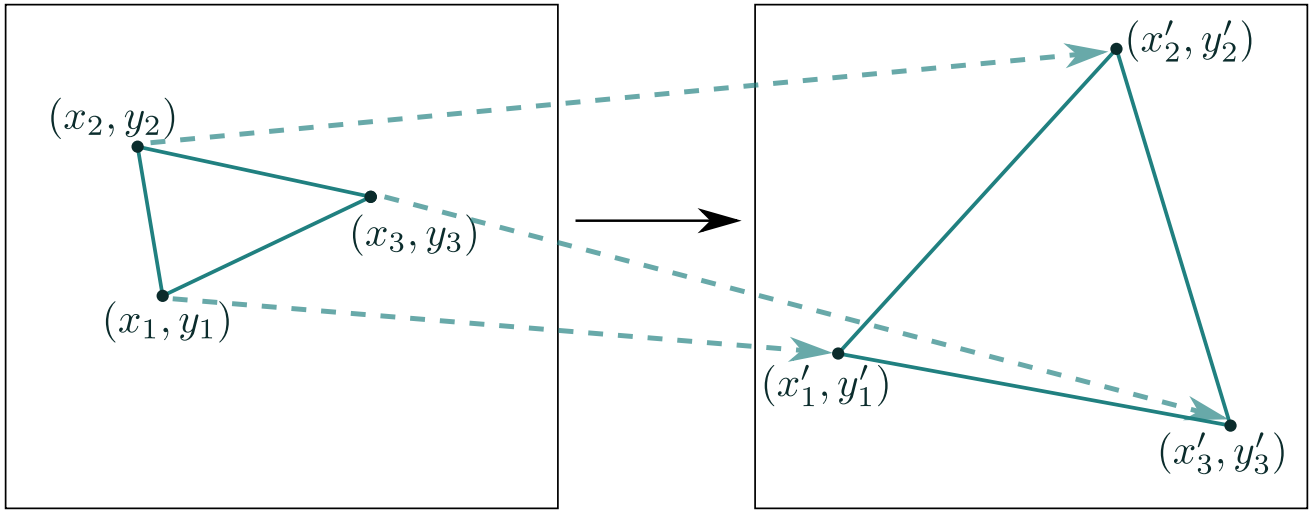
Ønsker å finne a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 og b_2.

Finne transformkoeffsientene

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ønsker å finne a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 og b_2.

- Kan bestemmes ved å spesifisere tre punkter før og etter transformasjonen



Andre former for geometriske transformasjoner

- Bilineære transformasjoner:

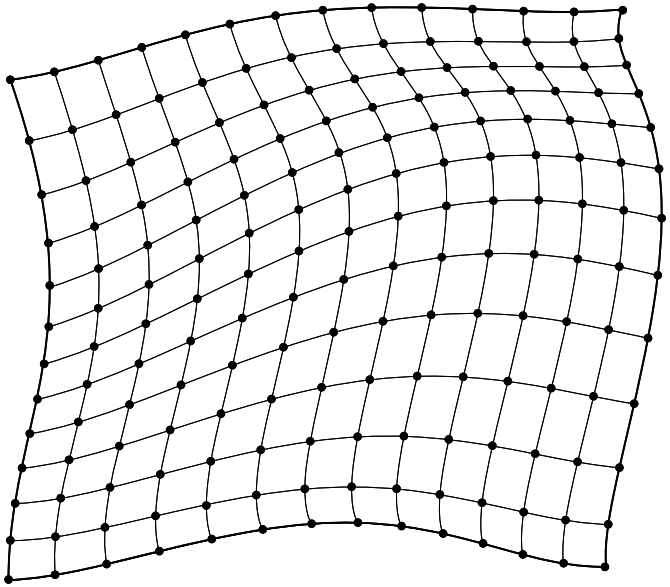
$$x' = a_0 x + a_1 y + a_2 + a_3 xy$$
$$y' = b_0 x + b_1 y + b_2 + b_3 xy$$

- Kvadratiske former:

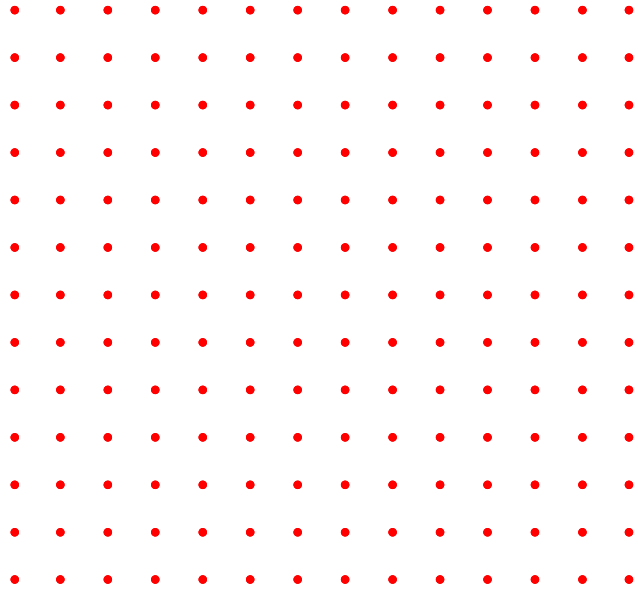
$$x' = a_0 x + a_1 y + a_2 + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2$$
$$y' = b_0 x + b_1 y + b_2 + b_3 xy + b_4 x^2 + b_5 y^2$$

- Kan brukes til å korrigere for mer komplekse avbildningsfeil
- Flere koeffsienter betyr flere punktpar som må brukes

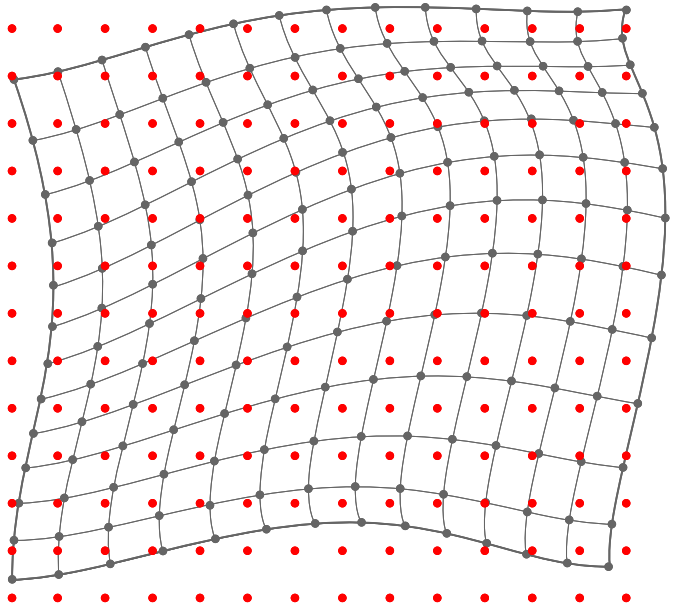
Resampling



Kun sampleverdier der linjene krysser



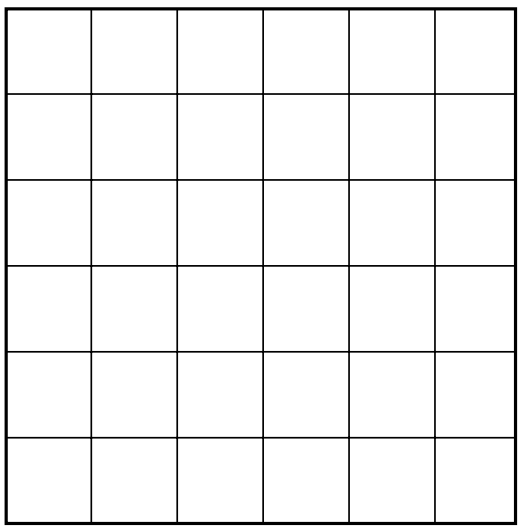
Ønsker bildet samplet i et regulært grid → resample



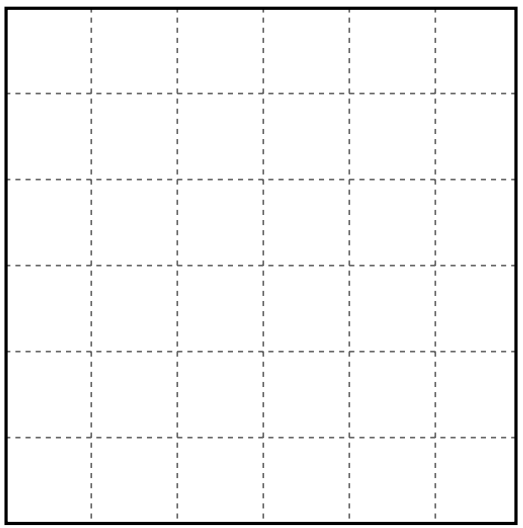
Forlengs-mapping

Gå gjennom alle piksler i **innbildet** og flytt dem til utbildet

Innbilde

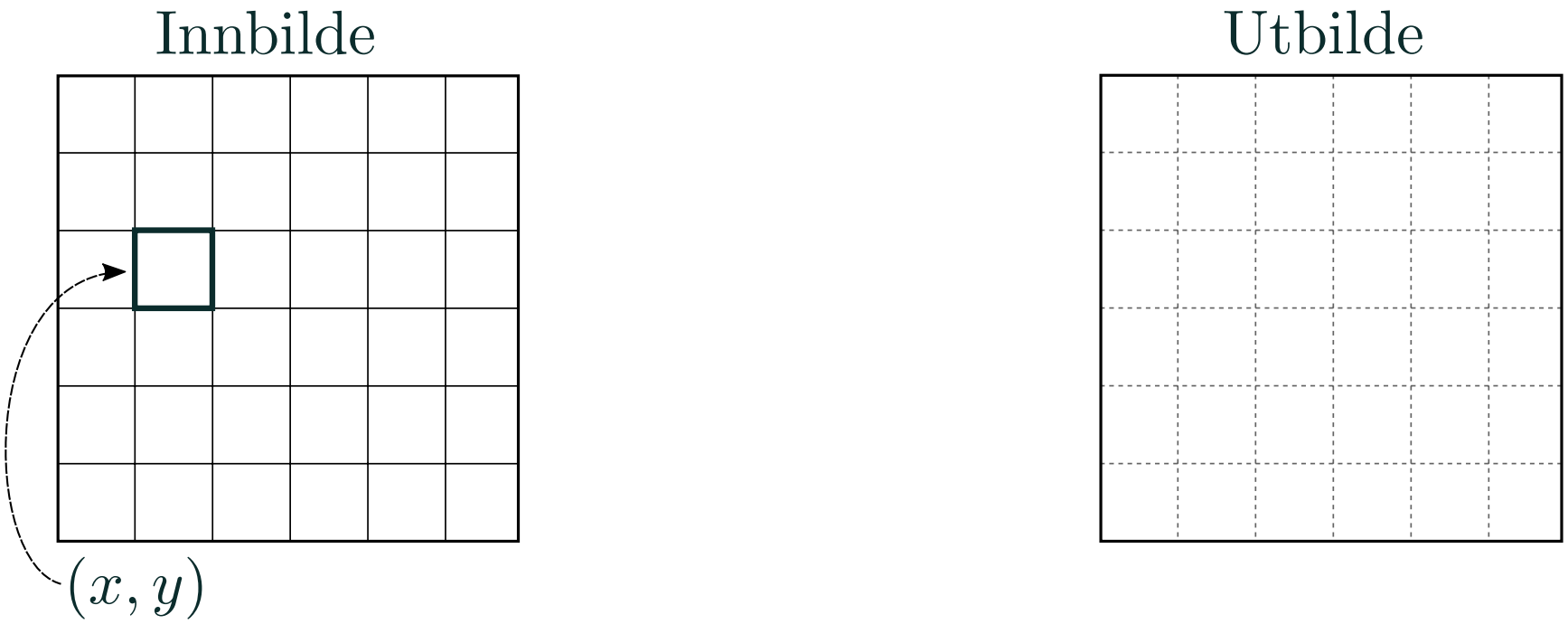


Utbilde



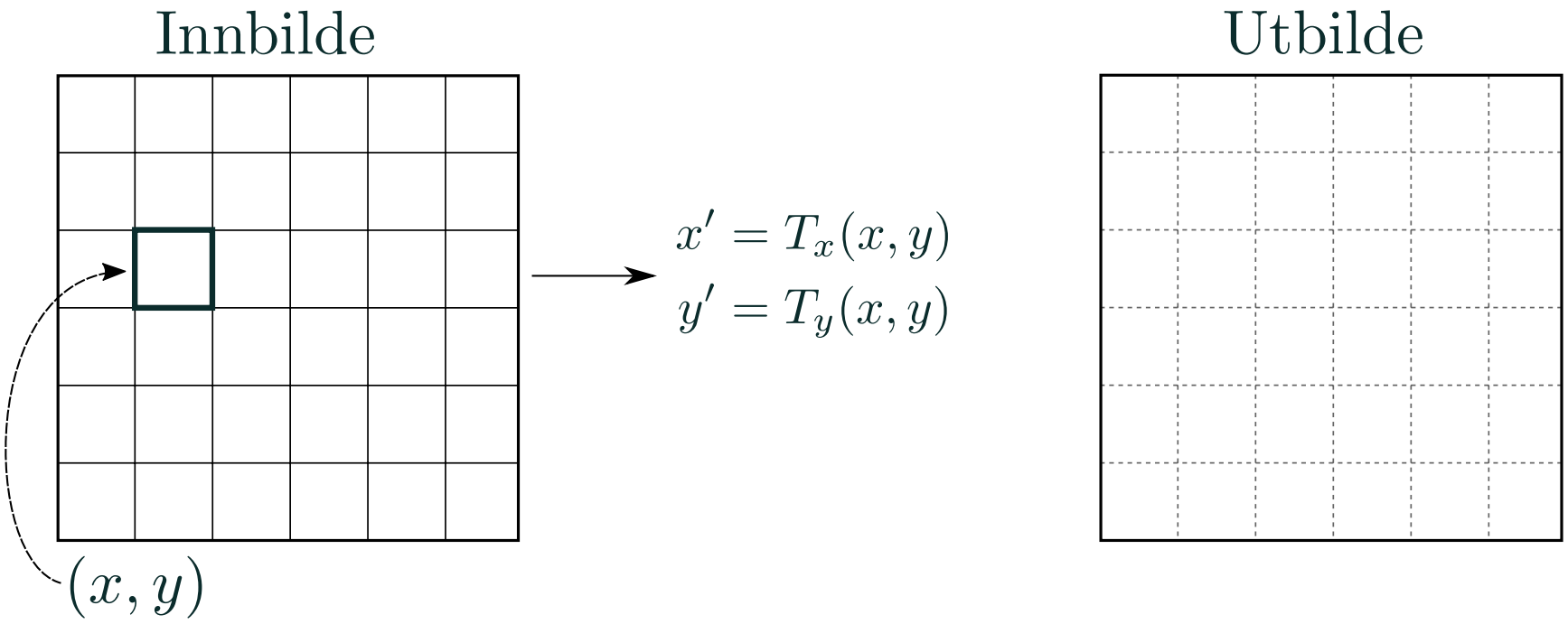
Forlengs-mapping

Gå gjennom alle piksler i **innbildet** og flytt dem til utbildet



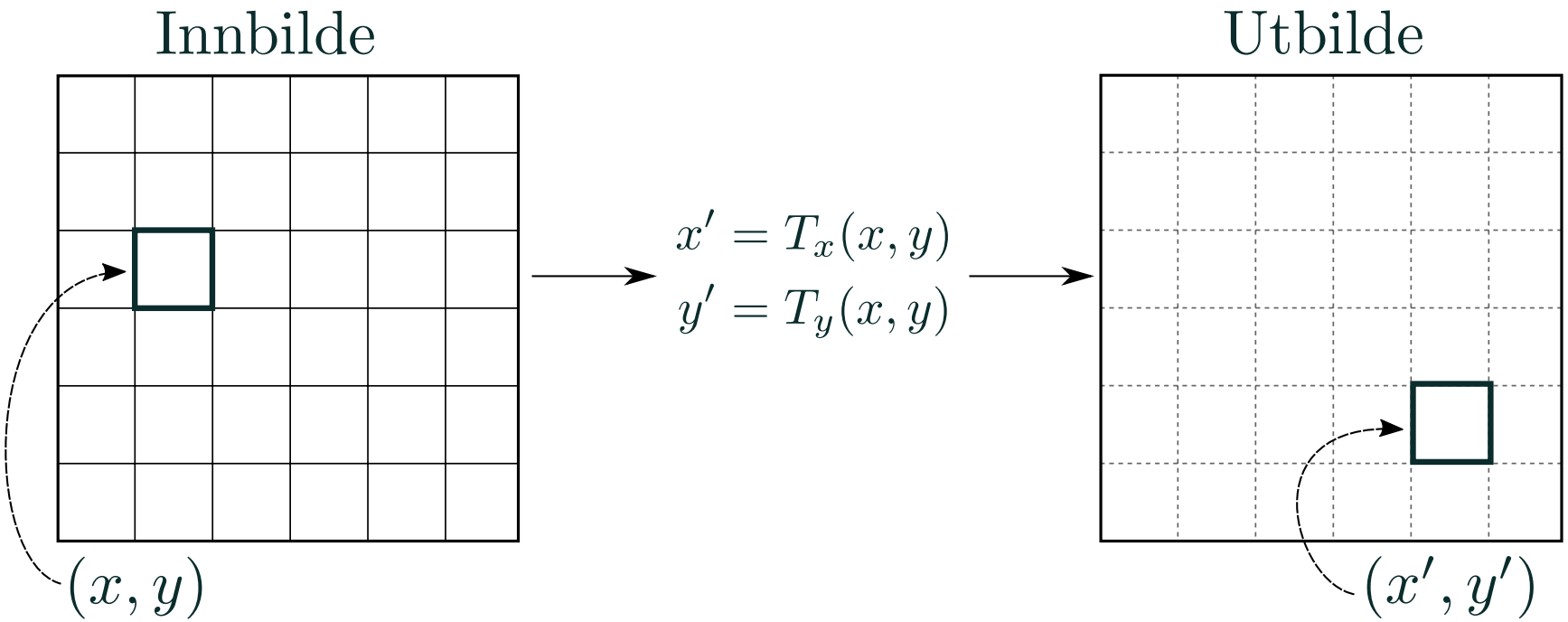
Forlengs-mapping

Gå gjennom alle piksler i **innbildet** og flytt dem til utbildet



Forlengs-mapping

Gå gjennom alle piksler i **innbildet** og flytt dem til utbildet

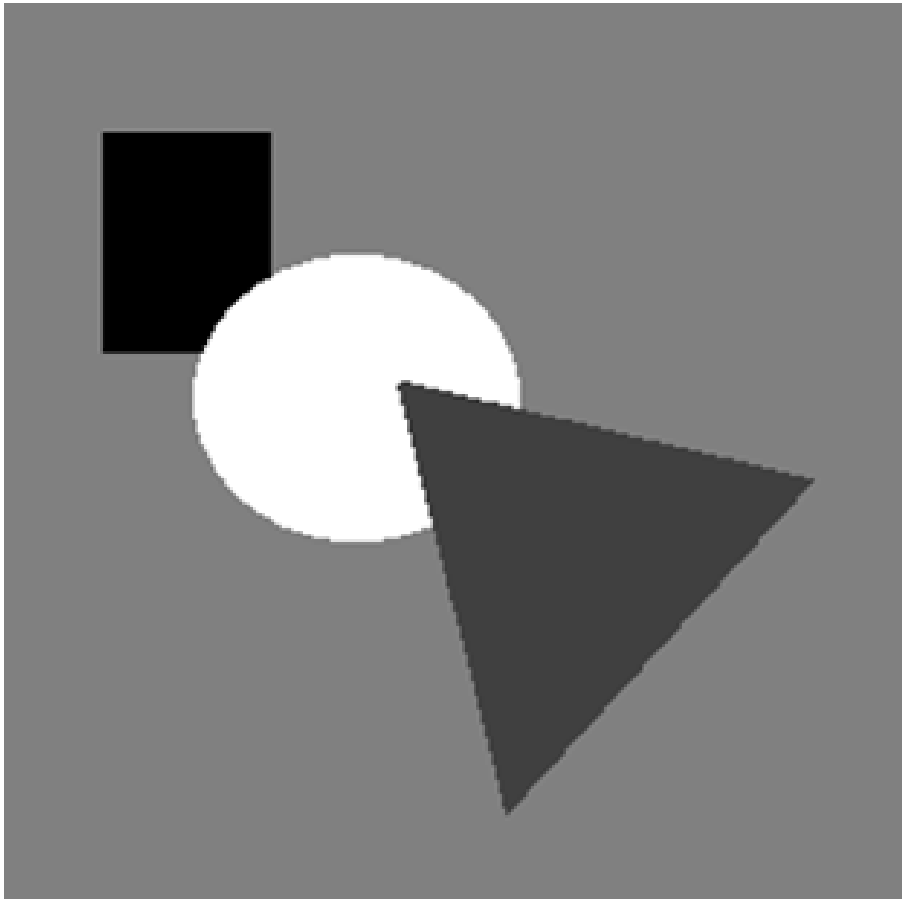


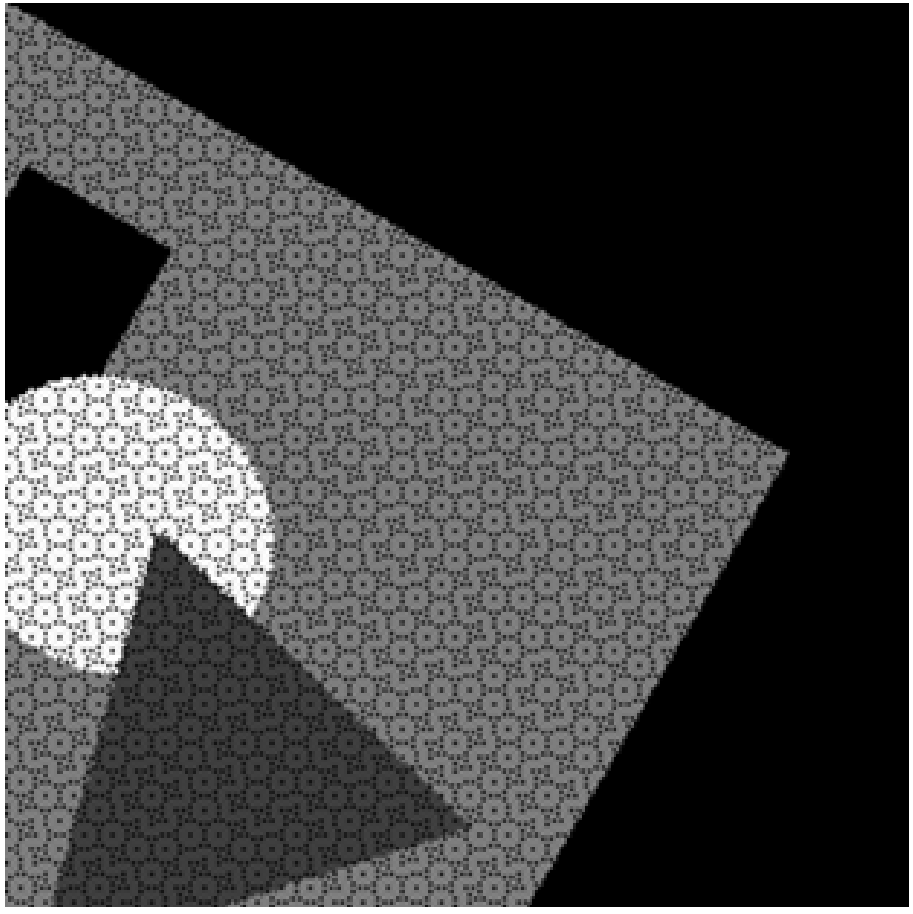
Forlengs-mapping

Algorithm 1: Forlengs-mapping

1: **for** alle (x, y) i INNBILDE **do**
2: $x' = T_x(x, y)$
3: $y' = T_y(x, y)$
4: **if** (x', y') er i UTBILDE **then**
5: UTBILDE(x', y') = INNBILDE(x, y)
6: **end if**
7: **end for**

Forlengs-mapping

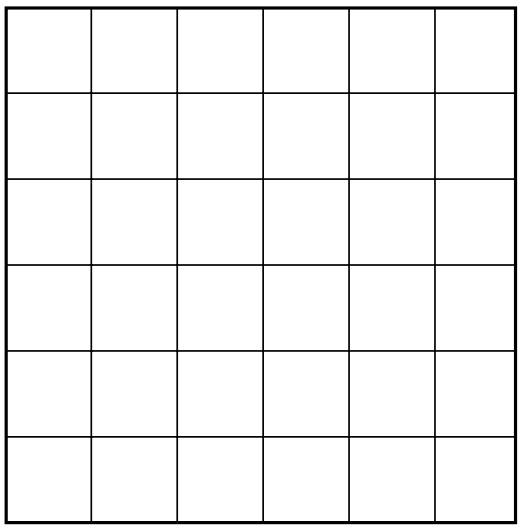




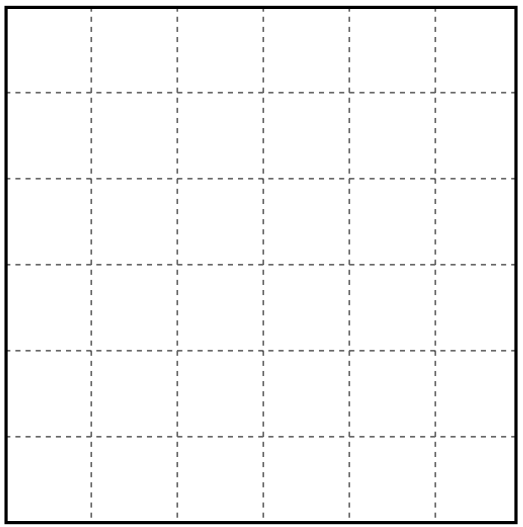
Baklengs-mapping (invers mapping)

Gå gjennom alle piksler i **utbildet** og finn ut hvilken piksel verdi fra innbildet vi må hente

Innbilde

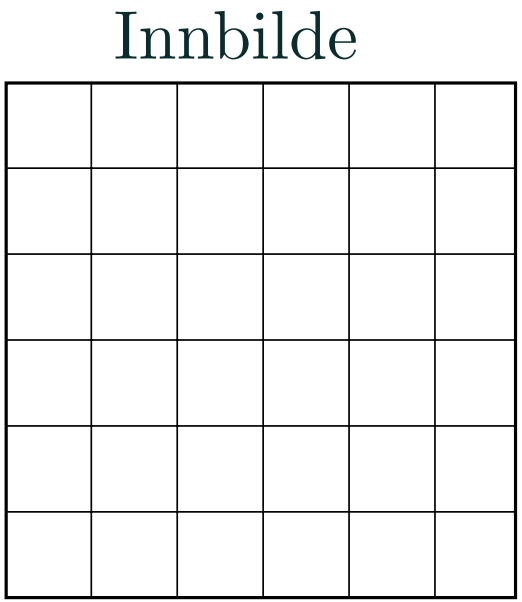


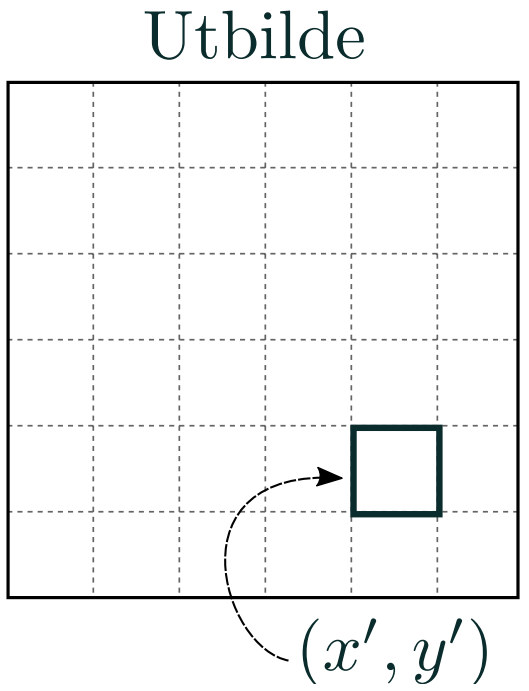
Utbilde



Baklengs-mapping (invers mapping)

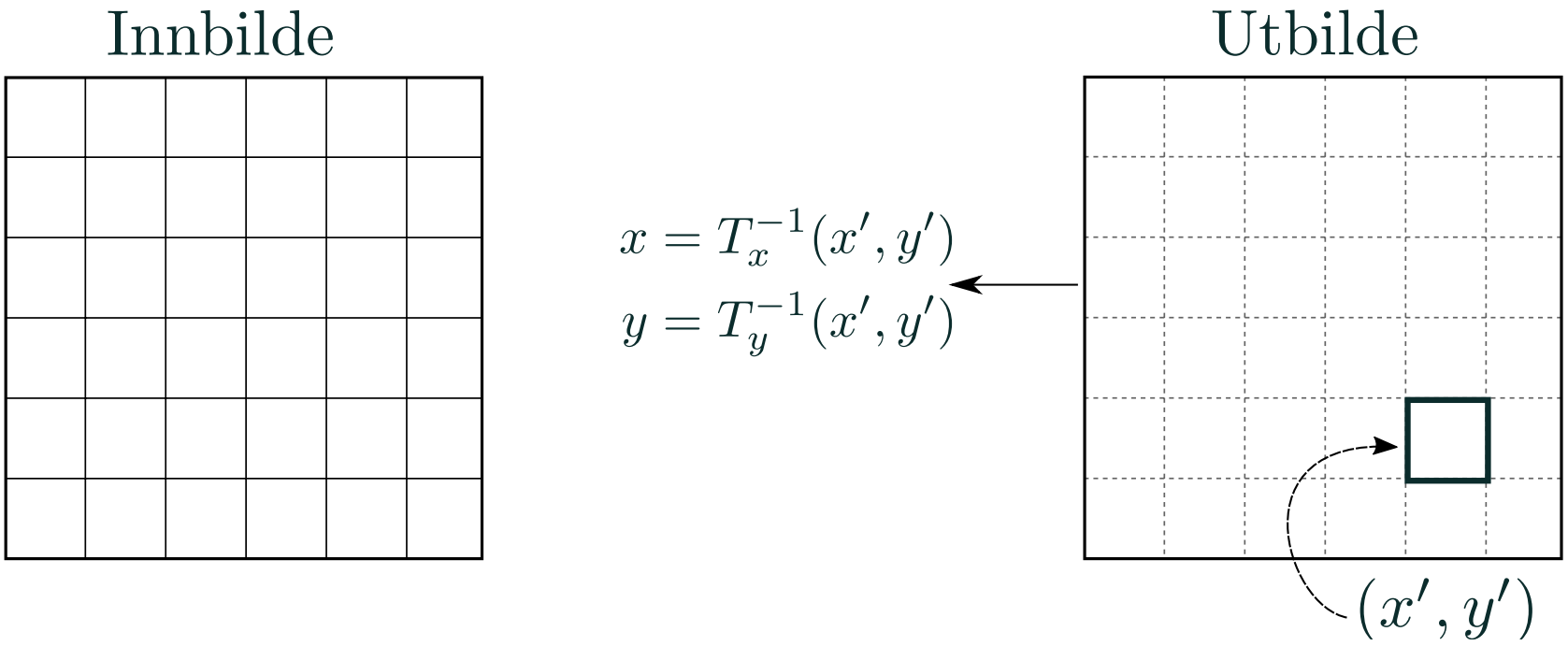
Gå gjennom alle piksler i **utbildet** og finn ut hvilken piksel verdi fra innbildet vi må hente





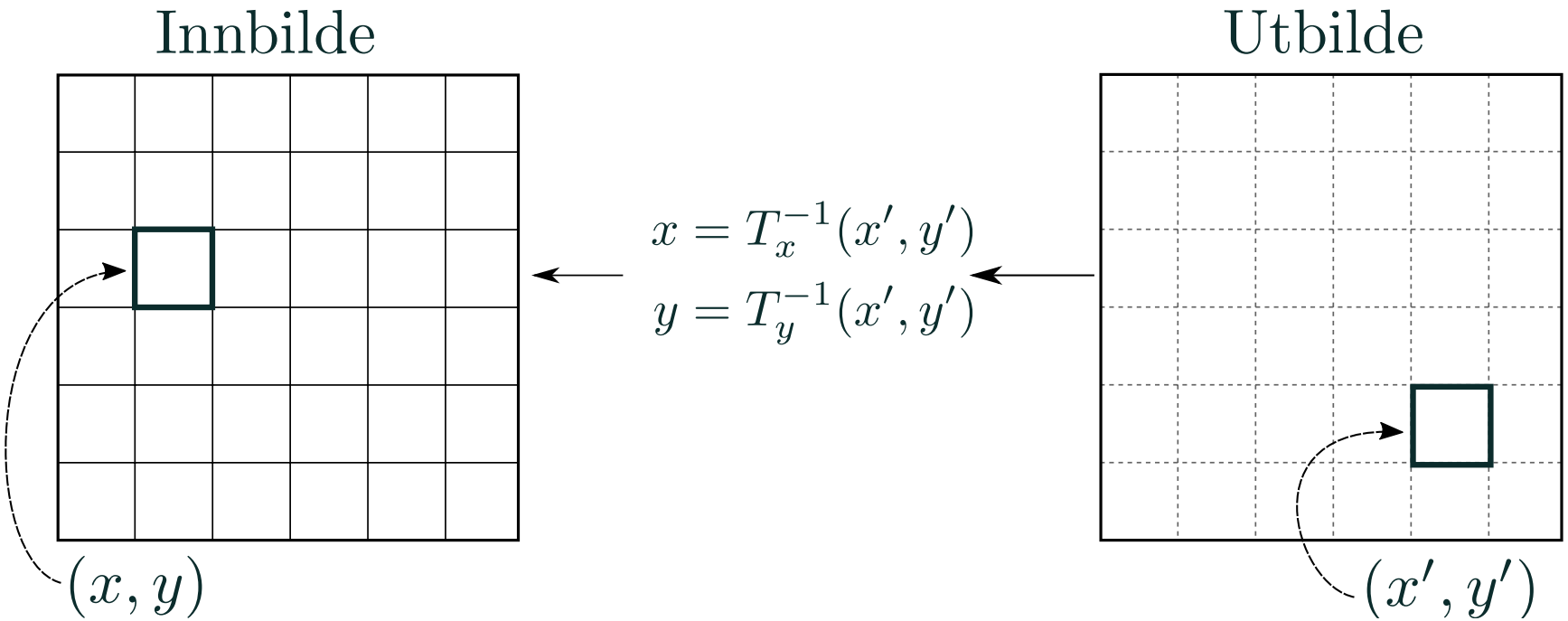
Baklengs-mapping (invers mapping)

Gå gjennom alle piksler i **utbildet** og finn ut hvilken piksel verdi fra innbildet vi må hente



Baklengs-mapping (invers mapping)

Gå gjennom alle piksler i **utbildet** og finn ut hvilken piksel verdi fra innbildet vi må hente

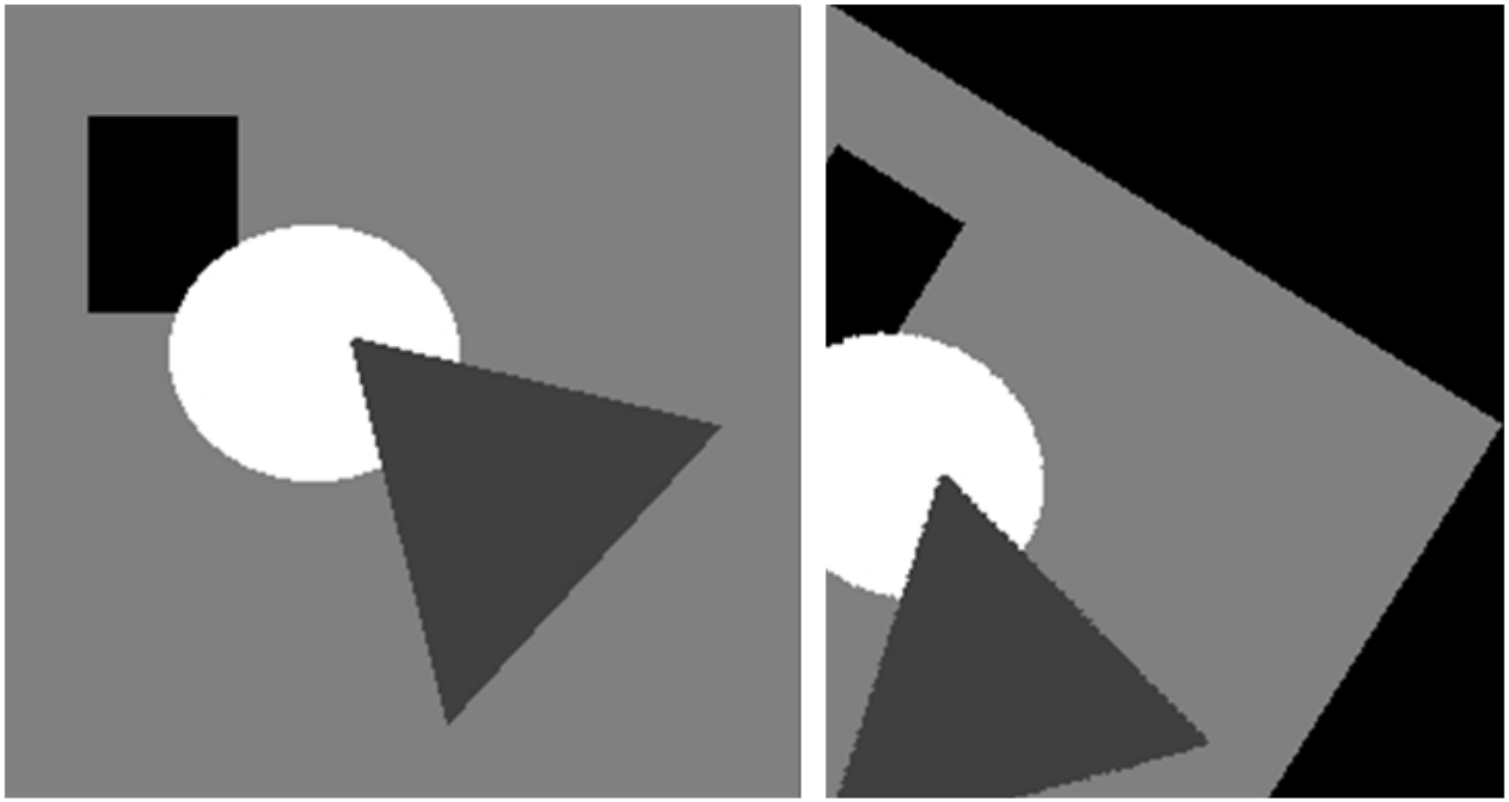


Baklengs-mapping (invers mapping)

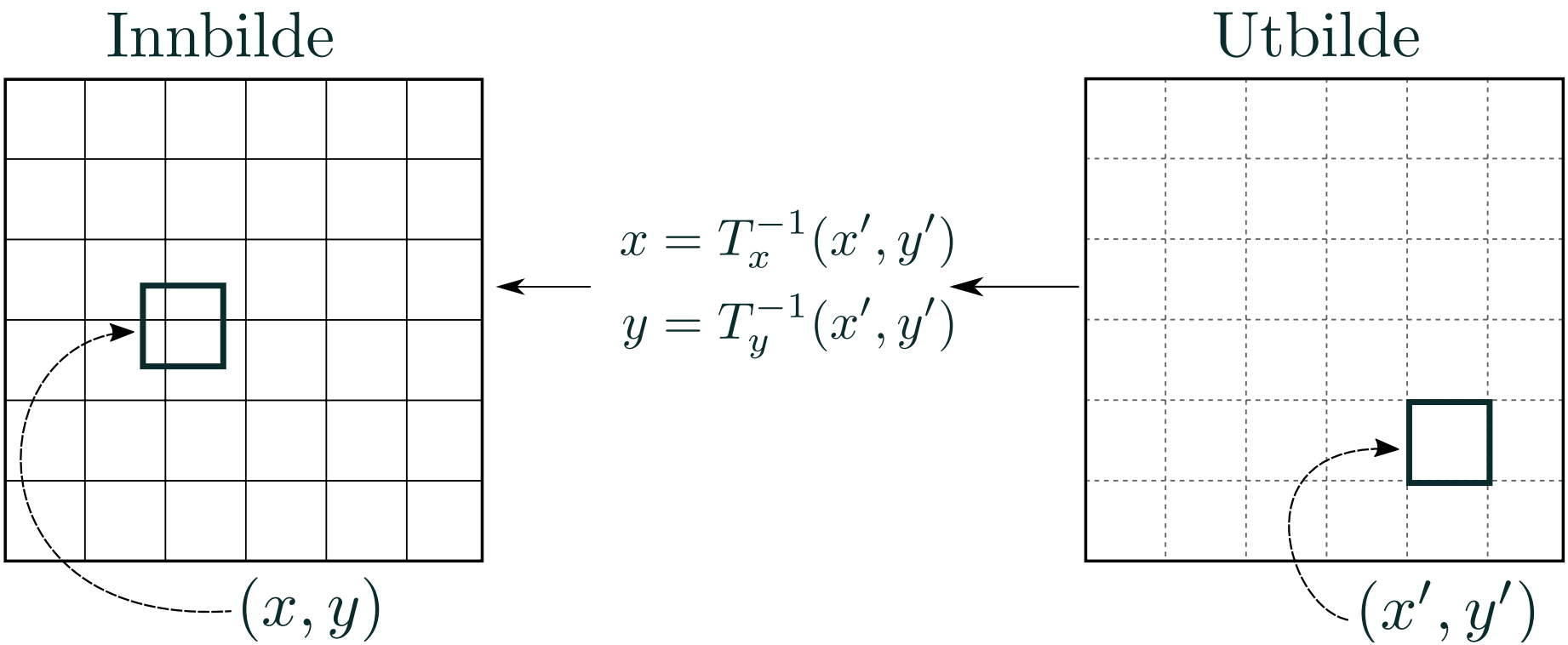
Algorithm 2: Baklengs-mapping

1: **for** alle (x', y') i UTBILDE **do**
2: $x = T_x^{-1}(x', y')$
3: $y = T_y^{-1}(x', y')$
4: **if** (x, y) er i INNBILDE **then**
5: UTBILDE(x', y') = interpolert verdi til INNBILDE(x, y)
6: **end if**
7: **end for**

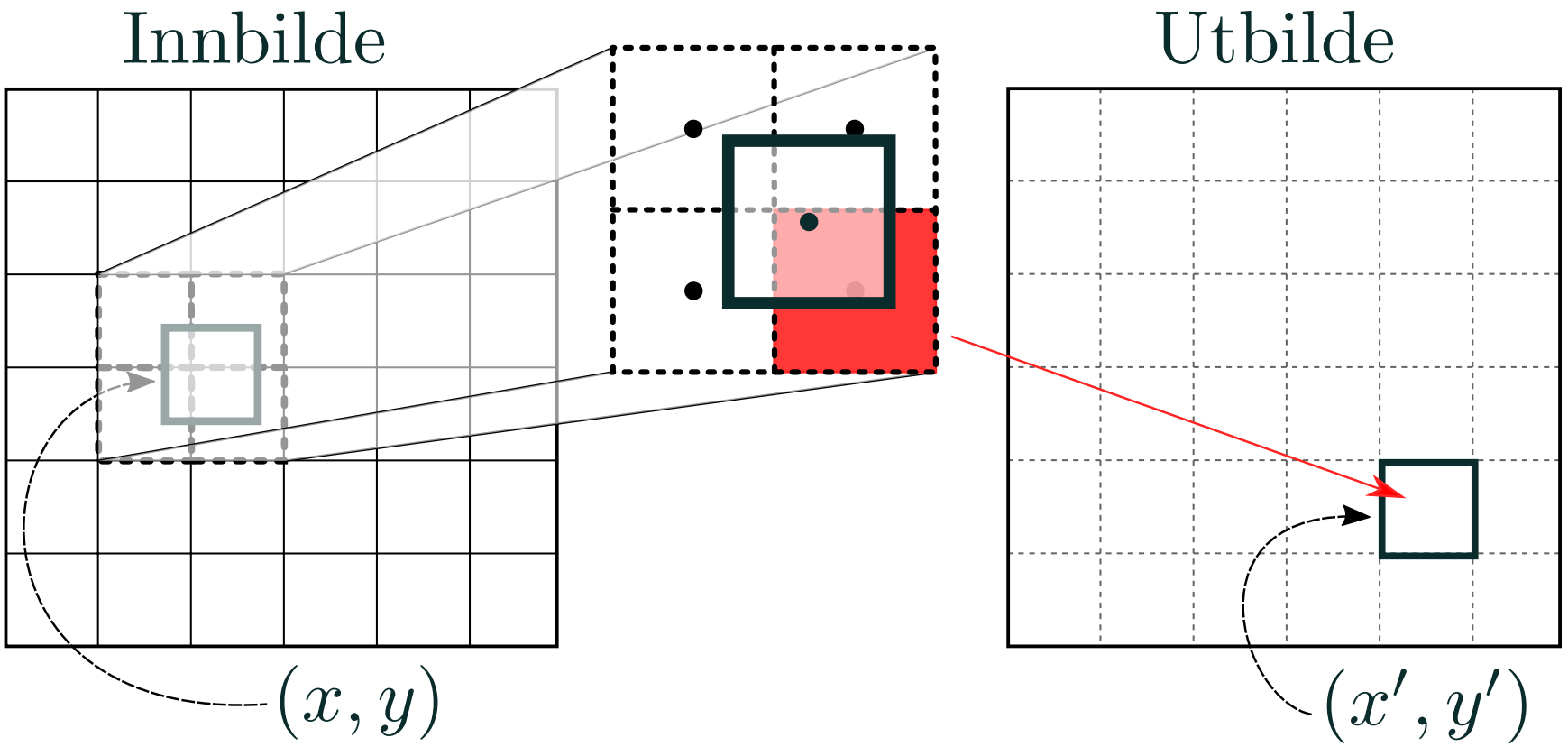
Baklengsmapping



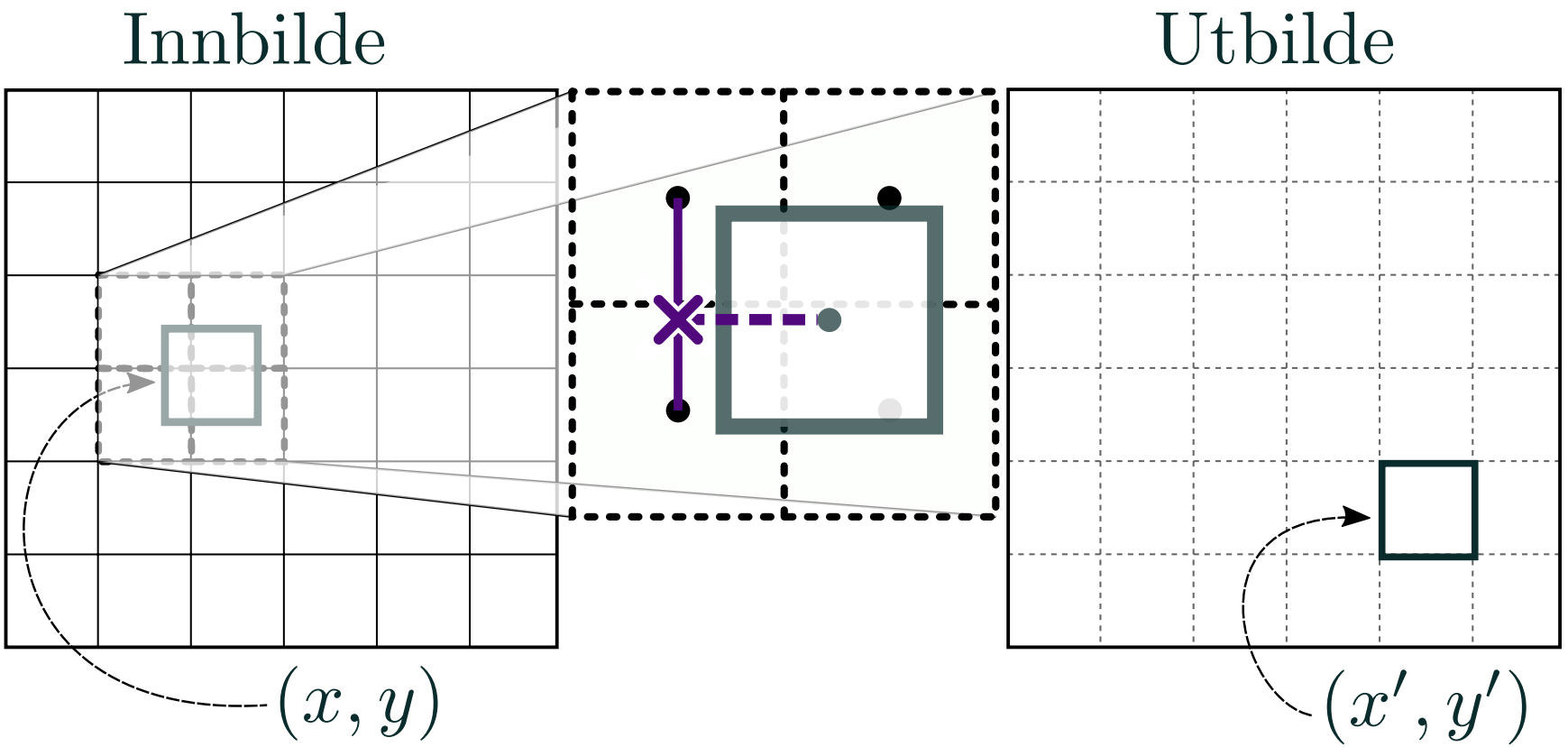
Hvorfor interpolasjon i baklengs-mapping?



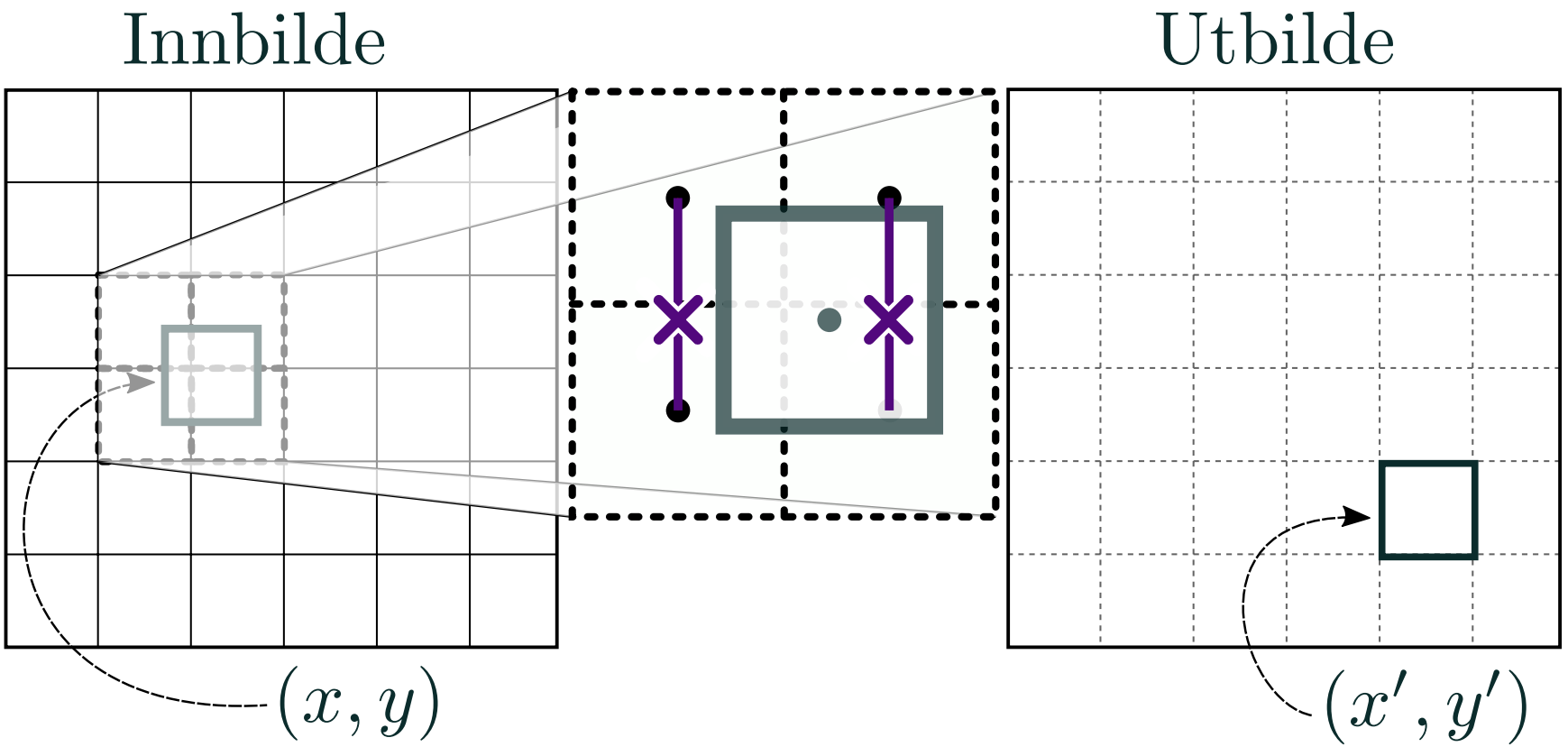
Nærmeste nabo interpolasjon



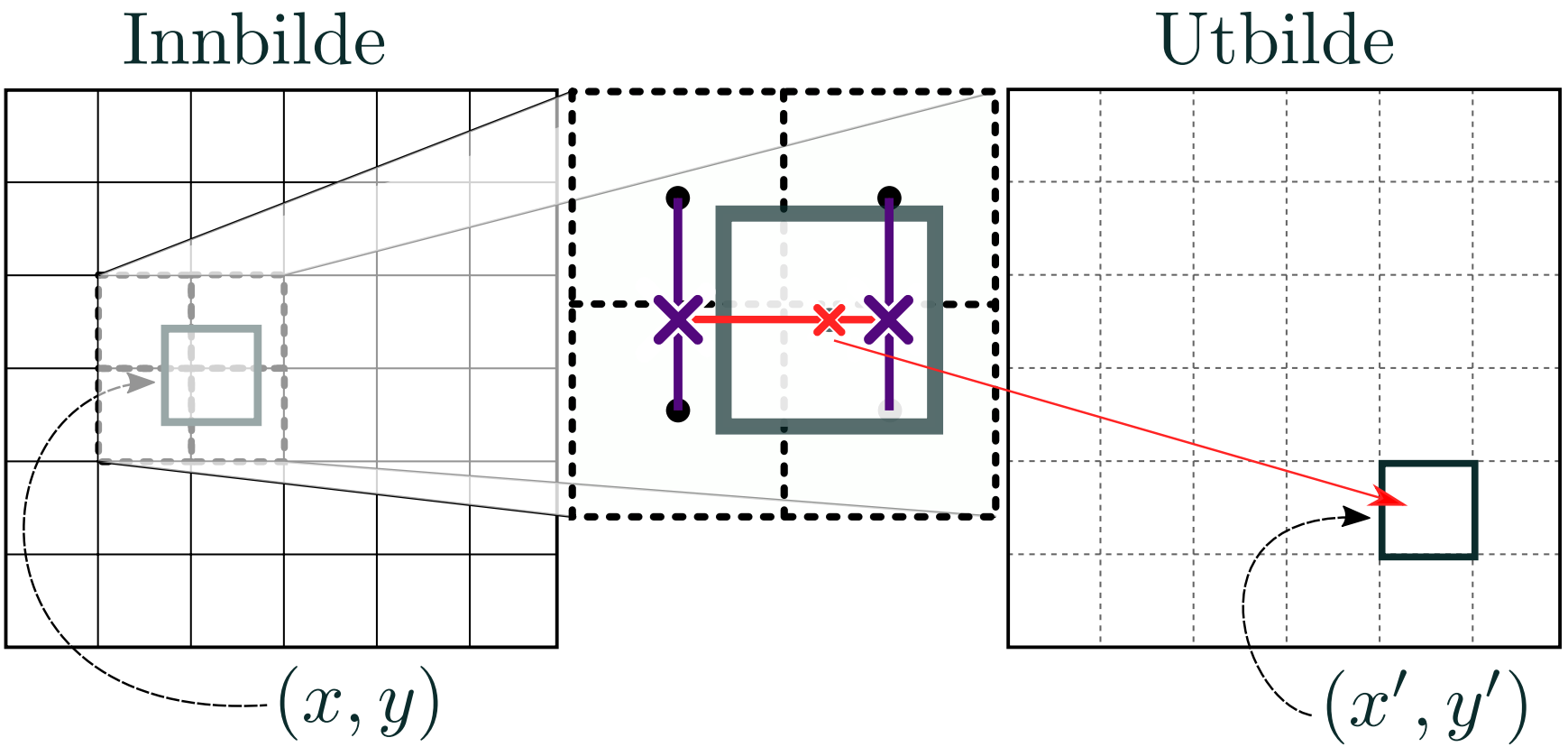
Bilineær interpolasjon



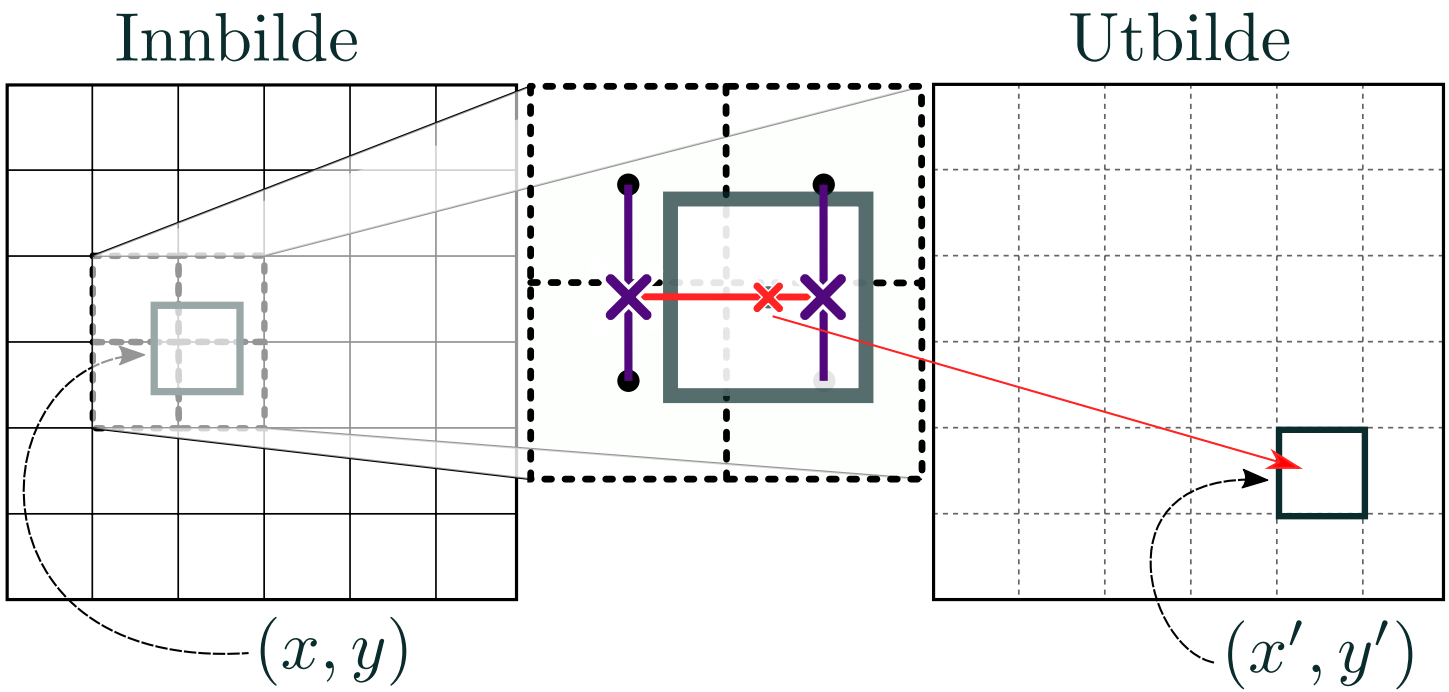
Bilineær interpolasjon



Bilineær interpolasjon



Bilineær interpolasjon



$$x_0 = \texttt{floor}(x);\ y_0 = \texttt{floor}(y)$$

$$x_1 = \texttt{ceil}(x);\quad y_1 = \texttt{ceil}(x)$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$\Delta y = y - y_0$$

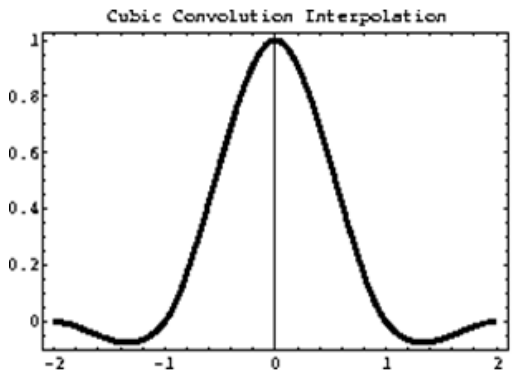
$$p = f_{\text{INN}}(x_0, y_0) + (f_{\text{INN}}(x_1, y_0) - f_{\text{INN}}(x_0, y_0))\Delta x$$

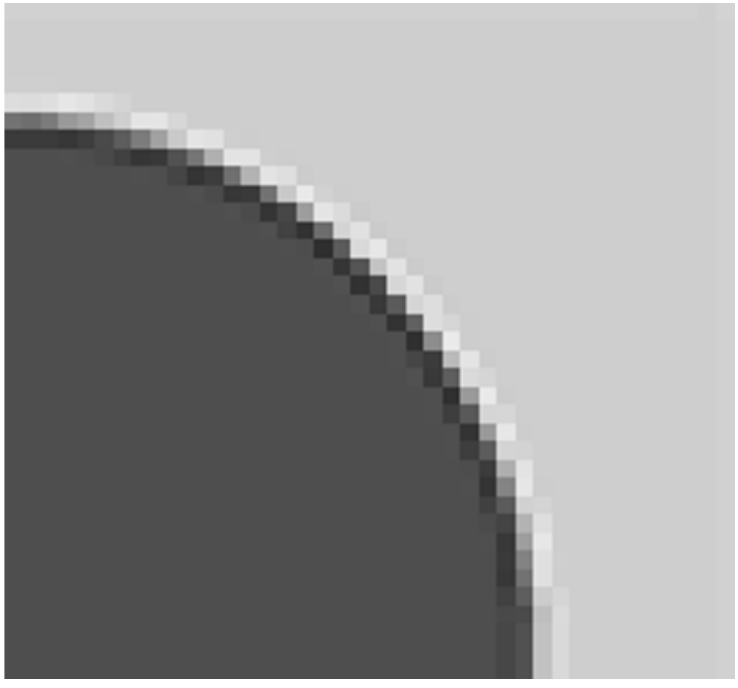
$$q = f_{\text{INN}}(x_0, y_1) + (f_{\text{INN}}(x_1, y_1) - f_{\text{INN}}(x_0, y_1))\Delta x$$

$$f_{\text{UT}}(x', y') = p + (q - p)\Delta y$$

Høyere-ordens interpolasjon

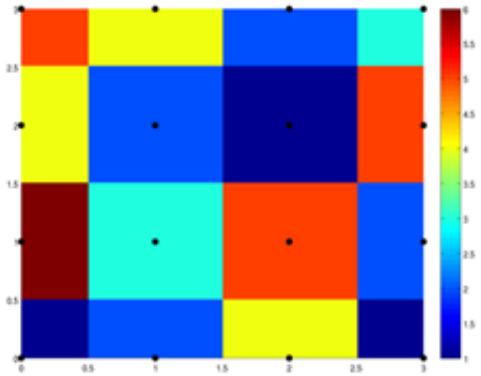
- Kontinuerlige deriverte av høyere orden
- Mer regnekrevende
- Kan gi opphav til ”kant-glorie” effekter

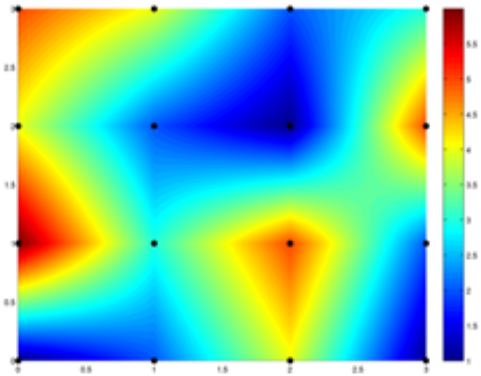


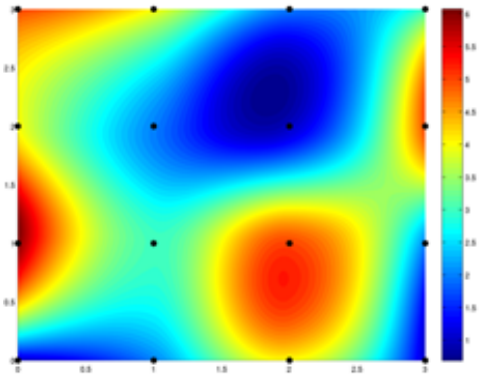


Baklengsmapping med ulike interpolasjonsmetoder

- Nærmeste nabo gir en trappefunksjon i 2D og skaper diskontinuitet midt mellom punktene.
  Bruker ett piksel pr. piksel
- Bilineær interpolasjon gir kontinuerlig overflate, men diskontinuerlig derivert.
  Bruker $2 \times 2 = 4$ piksler pr. piksel.
- Bikubisk interpolasjon gir glatte og kontinuerlige flater, men er mer regnekrevende.
  Bruker $4 \times 4 = 16$ piksler pr. piksel.







Interpolasjonsmetodene

- **Nærmeste nabo:**
  - Taggete kanter
  - Hver piksel bruker verdi fra innbildet

Interpolasjonsmetodene

- **Nærmeste nabo:**
  - Taggete kanter
  - Hver piksel bruker verdi fra innbildet
- **Bilineær:**
  - Kontinuerlige resultat
  - Noe mer regnekrevende

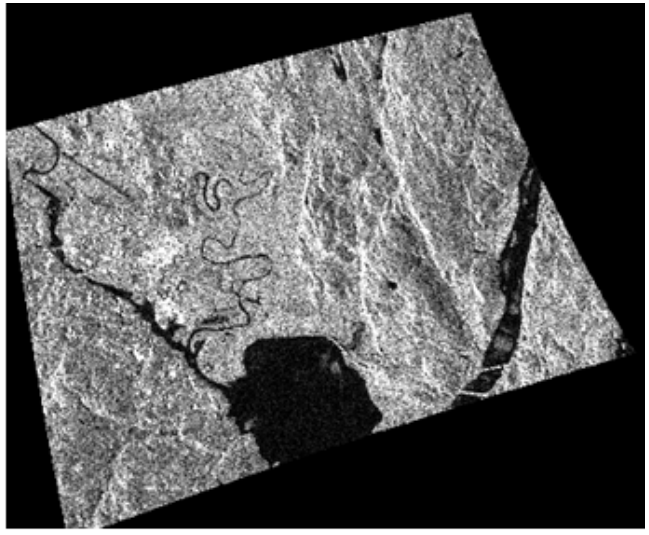
Interpolasjonsmetodene

- **Nærmeste nabo:**
  - Taggete kanter
  - Hver piksel bruker verdi fra innbildet
- **Bilineær:**
  - Kontinuerlige resultat
  - Noe mer regnekrevende
- **Høyere-ordens interpolasjon (f.eks bikubisk):**
  - Kontinuerlig derivert av ønsket orden
  - Betydelig mer regnekrevende
  - kan gi opphav til ”kant-glorie” effekter

Bruk av geometriske transformasjoner: Samregistrering

Innbilde

Ønsket bilde å samregistrere med



Transformert bilde

Samregistrering

- Hvis kartkoordinatene er kjent i bildene, kan de brukes til å finne transformasjonskoeffsientene
- Hvis ikke, kan vi velge kontrollpunktene selv

Samregistrering

- Kan bruke flere kontrollpunkter enn nødvendig for å bestemme transformasjonskoeffsientene

Samregistrering

- Kan bruke flere kontrollpunkter enn nødvendig for å bestemme transformasjonskoeffsientene
- Finner ofte transformasjonskoeffsienter som minimerer sum av kvadrat feil ved de valgte punktparene i inn- og referansebilde

Samregistrering

- Kan bruke flere kontrollpunkter enn nødvendig for å bestemme transformasjonskoeffsientene
- Finner ofte transformasjonskoeffsienter som minimerer sum av kvadrat feil ved de valgte punktparene i inn- og referansebilde
- Anta N punkt i innbilde (x_i, y_i) og i referansebilde $(x_i^{(r)}, y_i^{(r)})$

Samregistrering

- Kan bruke flere kontrollpunkter enn nødvendig for å bestemme transformasjonskoeffsientene
- Finner ofte transformasjonskoeffsienter som minimerer sum av kvadrat feil ved de valgte punktparene i inn- og referansebilde
- Anta N punkt i innbilde (x_i, y_i) og i referansebilde $(x_i^{(r)}, y_i^{(r)})$
- Vi ønsker å finne transformasjonen $(x_i, y_i) \rightarrow (x_i^{(r)}, y_i^{(r)})$ som minimerer

$$J = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i' - x_i^{(r)}\right)^2 + \left(y_i' - y_i^{(r)}\right)^2$$

Samregistrering ved minimering av kvadratfeil

Ønsker å minimere:

Utledningen av hvordan vi får vektoren a er kursorisk!

$$J = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i' - x_i^{(r)} \right)^2 + \left(y_i' - y_i^{(r)} \right)^2 = J_x + J_y$$

La

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} x_1^{(r)} \\ x_2^{(r)} \\ \vdots \\ x_N^{(r)} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ & \vdots & \\ x_N & y_N & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Ser på $J_x = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i' - x_i^{(r)} \right)^2$ (tilsvarende tankegang for J_y):

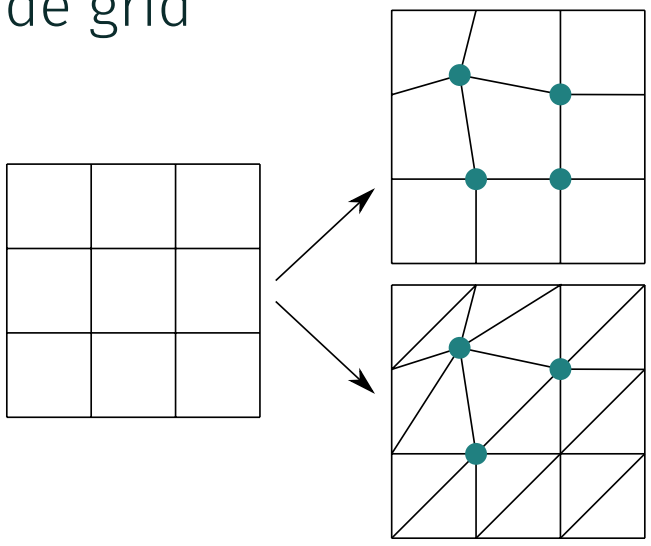
$$J_x = (\boldsymbol{d} - G\boldsymbol{a})^T (\boldsymbol{d} - G\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{d} - 2\boldsymbol{a}^T G^T \boldsymbol{d} + \boldsymbol{a}^T G^T G \boldsymbol{a}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{a}} J_x = 2G^T G\boldsymbol{a} - 2G^T \boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a} = \underline{\underline{\left(G^T G\right)^{-1} G^T \boldsymbol{d}}}$$

Stykkevise transformasjoner

- Forskjellige transformasjoner på ulike deler av bildet
- Må bestemme struktur på underliggende grid (kvadrater, rektangler, trekanter, ...)
- Grid bestemmer hvordan de ulike delene av bildet skal endres
- Bilineær transformasjon kan brukes,



$$x' = a_0 x + a_1 y + a_2 + a_3 xy$$

$$y' = b_0 x + b_1 y + b_2 + b_3 xy$$

Oppsummering

- Transformasjoner av pikslenes koordinater
- Resampling
  - Forlengs-mapping
  - Baklengs-mapping
- Interpolasjonsmetoder
  - Nærmeste nabo interpolasjon
  - Bilineær interpolasjon
  - Høyere-ordens interpolasjon
- Bruk av geometriske operasjoner til å samregistrere bilder