IN2070 - Morfologiske operasjoner på binære bilder

28. april 2021

- Grunnleggende mengdeteori
- Fundamentale operatorer
- Sammensatte operatorer
- Eksempler på anvendelser

Hva er morfologi?

- Brukes som et steg i behandling og analyse av bilder
- Modifiserer formen til objekter gjennom lokale operasjoner

Bruksområder

- Kan brukes til å **fjerne uønskede effekter** etter segmentering:
  - Fjerne små objekter (støy)
  - Glatte omrisset til større objekter
  - Fylle hull i objekter
  - Lenke sammen objekter

Bruksområder

- Kan brukes til å **fjerne uønskede effekter** etter segmentering:
  - Fjerne små objekter (støy)
  - Glatte omrisset til større objekter
  - Fylle hull i objekter
  - Lenke sammen objekter
- Kan brukes som et steg å **beskrive/analysere objekter**:
  - Finne omriss til objekter
  - Tynne objekter
  - Finne objekter som inneholder en viss struktur
  - Finne mønstre i et bilde

Bruksområder

- Kan brukes til å **fjerne uønskede effekter** etter segmentering:
  - Fjerne små objekter (støy)
  - Glatte omrisset til større objekter
  - Fylle hull i objekter
  - Lenke sammen objekter
- Kan brukes som et steg å **beskrive/analysere objekter**:
  - Finne omriss til objekter
  - Tynne objekter
  - Finne objekter som inneholder en viss struktur
  - Finne mønstre i et bilde
- Ofte enkle operasjoner som kan utføres raskt

Bruksområder

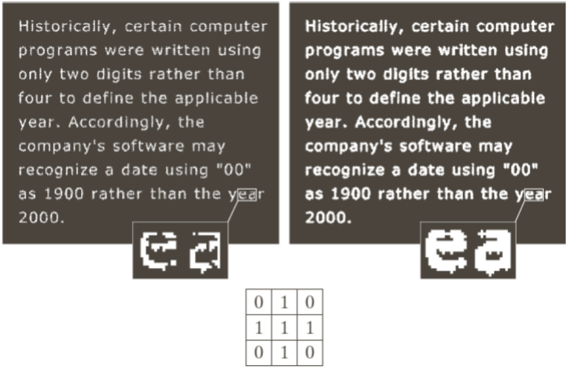
- Kan brukes til å **fjerne uønskede effekter** etter segmentering:
  - Fjerne små objekter (støy)
  - Glatte omrisset til større objekter
  - Fylle hull i objekter
  - Lenke sammen objekter
- Kan brukes som et steg å **beskrive/analysere objekter**:
  - Finne omriss til objekter
  - Tynne objekter
  - Finne objekter som inneholder en viss struktur
  - Finne mønstre i et bilde
- Ofte enkle operasjoner som kan utføres raskt
- Kan generaliseres til gråtonebilder

Eksempel: Lenke sammen objekter

Morfologiske operasjoner kan ofte brukes til å forbedre en segmentering

Eksempel: Lenke sammen objekter

Morfologiske operasjoner kan ofte brukes til å forbedre en segmentering



a c
b

FIGURE 9.7 (a) Sample text of poor resolution with broken characters (see magnified view). (b) Structuring element. (c) Dilation of (a) by (b). Broken segments were joined.

Litt mengdeteori - Elementer i en mengde

- En **mengde** består av **elementer**

Litt mengdeteori - Elementer i en mengde

- En **mengde** består av **elementer**
- **Rekkefølgen** av elementene og **antallet** er **ubestemt**

Litt mengdeteori - Elementer i en mengde

- En **mengde** består av **elementer**
- **Rekkefølgen** av elementene og **antallet** er **ubestemt**
- Dersom et element a finnes i en mengde A, skriver vi $a \in A$

Litt mengdeteori - Elementer i en mengde

- En **mengde** består av **elementer**
- **Rekkefølgen** av elementene og **antallet** er **ubestemt**
- Dersom et element a finnes i en mengde A, skriver vi $a \in A$
- Dersom et element a ikke finnes i en mengde A, skriver vi $a \notin A$

Litt mengdeteori - Elementer i en mengde

- En **mengde** består av **elementer**
- **Rekkefølgen** av elementene og **antallet** er **ubestemt**
- Dersom et element a finnes i en mengde A, skriver vi $a \in A$
- Dersom et element a ikke finnes i en mengde A, skriver vi $a \notin A$
- Den **tomme mengden** er en mengde uten noen elementer og skrives $\emptyset$

Litt mengdeteori - Grunnleggende

- **Komplementet** A^C til mengden A inneholder elementene som ikke finnes i A

Litt mengdeteori - Grunnleggende

- **Komplementet** A^C til mengden A inneholder elementene som ikke finnes i A
- Mengden A er en **delmengde** av mengden B dersom alle elementer i A finnes i B.
  Betegnes som $A \subseteq B$

Litt mengdeteori - Grunnleggende

- **Komplementet** A^C til mengden A inneholder elementene som ikke finnes i A
- Mengden A er en **delmengde** av mengden B dersom alle elementer i A finnes i B.
  Betegnes som $A \subseteq B$
- **Unionen** av to mengder A og B er mengden som inneholder alle elementer fra A og B.
  Betegnes som $A \cup B$

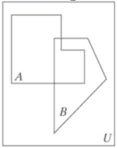
Litt mengdeteori - Grunnleggende

- **Komplementet** A^C til mengden A inneholder elementene som ikke finnes i A
- Mengden A er en **delmengde** av mengden B dersom alle elementer i A finnes i B.
  Betegnes som $A \subseteq B$
- **Unionen** av to mengder A og B er mengden som inneholder alle elementer fra A og B.
  Betegnes som $A \cup B$
- **Snittet** av to mengder A og B er mengden som består av alle elementer som finnes i *både* A og B.
  Betegnes som $A \cap B$

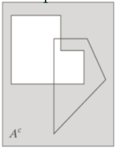
Mengder og binære bilder

- La A være en mengde i $\mathbb{Z}^2$ (hvert element i A er et punkt (a_1, a_2) der $a_1,\ a_2$ er heltall)
- Et **binært** bilde kan beskrives ved forgrunnspikslenes koordinater

To mengder

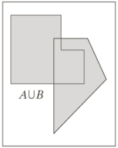


Komplementet



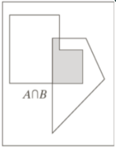
$$f^c(x,y) = \begin{cases} 1, f(x,y) = 0 \\ 0, f(x,y) = 1 \end{cases}$$

Unionen av to mengder



$$h(x,y) = \begin{cases} 1,\ f(x,y) = 1 \text{ eller } g(x,y) = 1 \\ 0,\ \text{ellers} \end{cases}$$

Snittet av to mengder



$$h(x,y) = \begin{cases} 1,\ f(x,y) = 1 \text{ og } g(x,y) = 1 \\ 0,\ \text{ellers} \end{cases}$$

- **Strukturelement**: Et naboskap for et binært bilde
- Når vi lar strukturelementet gå over det binære bildet, vil strukturelementet enten
  - ikke overlappe objektet i det hele tatt
  - **treffe** objektet, dvs at strukturelementet delvis overlapper med objektet
  - **passe** inne i objektet, dvs at det ligger inni objektet

1	1
1	1

0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

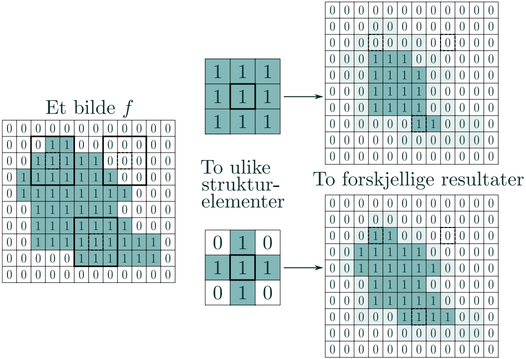
Strukturelementenes form og origo

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

- Strukturelementer kan ha ulik form og størrelse
- Må bestemme et **origo**:
  - Origo markerer pikselen som evnt. endrer verdi i utbildet
  - Origo *kan* ligge utenfor strukturelementet
  - Origo bør markeres når man bestemmer et strukturelement

Passer strukturelementet til det binære bildet?

- Vi flytter strukturelementet rundt ovet et binært bilde
- Strukturelementet **passer** i posisjonen (x, y) i bildet hvis *alle* ikke-null elementer overlapper alle pikselverdier i naboskapet
- I dette emnet lar vi
  - piksler som overlapper med 0 i strukturelementet være ignorert
  - piksler utenfor bildet være lik 0



Erosjon

- Plassér strukturelementet S slik at origo overlapper med posisjon (x, y) i innbildet f og beregn utbildet g ved:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } S \text{ \textbf{passer} } f \\ & \text{i posisjonen } (x, y) \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

- Vi skriver erosjon av et bilde f med strukturelement S som: $f \ominus S$

0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0

Erodert med

1	1	1
1	1	1
1	1	1

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Effekter av erosjon

- Erodering *krymper* objekter
- Piksler fjernes innenfra hvis objektet har hull
- Erosjon fjerner "små" utstikk i objektets omriss (små relativt til størrelse av struktuelementet)
- Erosjon utvider innbuktninger i objektets omriss
- Resultatet er avhengig av strukturelementet!
  Større strukturelement gir mer erosjon/fjerning av piksler

Effekter av erosjon

- Erodering *krymper* objekter
- Piksler fjernes innenfra hvis objektet har hull
- Erosjon fjerner "små" utstikk i objektets omriss (små relativt til størrelse av struktuelementet)
- Erosjon utvider innbuktninger i objektets omriss
- Resultatet er avhengig av strukturelementet!
  Større strukturelement gir mer erosjon/fjerning av piksler

0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0

Erodert med

1	1	1
1	1	1
1	1	1

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Iterativ erosjon

- Resultatet er avhengig av strukturelementet!
  Større strukturelement gir mer erosjon/fjerning av piksler
- Erosjon med et stort strukturelement er (nesten) lik resultatet av gjentatt erosjon med et mindre strukturelement av samme form
- Hvis strukturelementet S_2 er dobbelt så stort som strukturelementet S_1, er

$$f \ominus S_2 \approx (f \ominus S_1) \ominus S_1$$

0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0

Erodert to ganger med

1	1	1
1	$\boxed{1}$	1
1	1	1

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	1	0
1	$\boxed{1}$	1
0	1	0

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Anvendelse av erosjon: kantdeteksjon

Erodering fjerner piksler langs omrisset av et objekt

- Kantene til objektene i bildet kan finnes ved $g = f - (f \ominus S)$
- Strukturelementet S bestemmer kantens tilkoblingstype:

Innbilde

0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0

Erodert med

0	1	0
1	1	1
0	1	0

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Differanse med innbildet

0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0

Sammenhengende kanter ved 8-tilkobling

1	1	1
1	1	1
1	1	1

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0

Sammenhengende kanter ved 4-tilkobling

Eksempel: kantdeteksjon ved erosjon

Innbilde

Erodert med

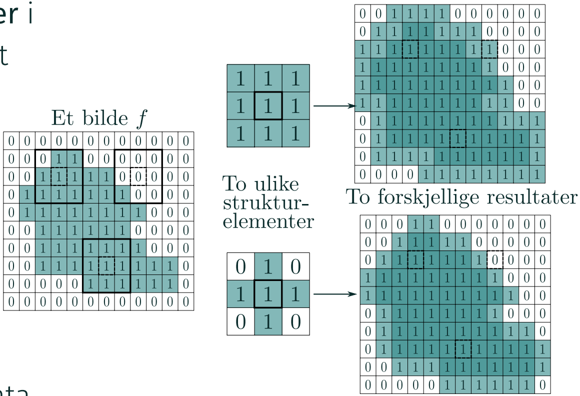
0	1	0
1	1	1
0	1	0

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Differanse med innbildet

Treffer strukturelementet det binære bildet?

- Vi flytter strukturelementet over et bilde
- Strukturelementet **treffer** i posisjonen (x, y) i bildet hvis *minst* ett ikke-null element overlapper en ikke-null pikselverdi i naboskapet
- Fortsatt ignorerer vi pikselverdier som overlapper 0 i strukturelementet og anta piksler utenfor bildet er lik 0



Dilasjon (dilatasjon)

- Rotér S 180 grader for å få $\hat{S}$ og plasser det slik at origo overlapper posisjon (x, y) i innbildet f og beregn utbildet g ved

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } \hat{S} \textbf{ treffer } f \text{ i posisjonen } (x,y) \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

- Dilasjon av et bilde f med strukturelement S skrives som: $f \oplus S$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Dilatert med

1	1	1
1	1	1
1	1	1

gir

1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1

0	1	0
1	1	1
0	1	0

gir

0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0

Effekter av dilasjon

- Dilasjon **utvider** objekter
- Dilasjon fyller hull i objekter gitt at strukturelementet er stort nok i forhold til hullet
- Dilasjon glatter ut innbuktninger i objektets omriss
- Resultatet er avhengig av strukturelementet! Større strukturelement gir større dilasjons-effekt

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Dilatert med

1	1	1
1	1	1
1	1	1

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	1	0
1	1	1
0	1	0

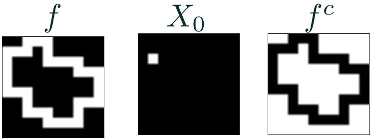
gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Anvendelse av dilasjon: region-fylling

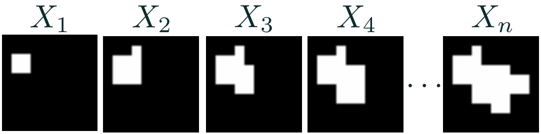
La x_0 inneholde et punkt i regionen som skal fylles.

Iterativt beregn $X_k = (X_{k-1} \oplus S) \cap f^c$ inntil konvergens



S

1	1	1
1	1	1
1	1	1



Her er hvit forgrunn og svart bakgrunn

Bildene er hentet fra `denne siden` (siden beskriver også dilasjon)

Effekter av sirkulære strukturelementer på hjørner

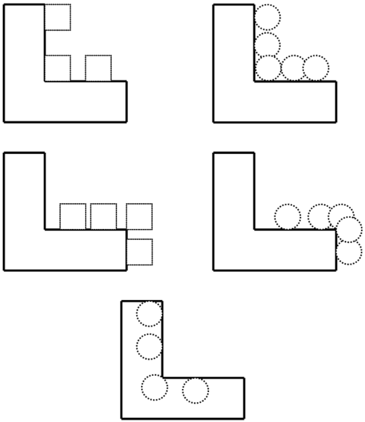
- Både dilatering og erodering med *rektangulære* strukturelementer *bevarer* formen til hjørner

Effekter av sirkulære strukturelementer på hjørner

- Både dilatering og erodering med *rektangulære* strukturelementer *bevarer* formen til hjørner
- **Dilatering** av hjørner med sirkulære strukturelementer:
  - Konkave hjørner bevarer sin form
  - Konvekse hjørner blir avrundet

Effekter av sirkulære strukturelementer på hjørner

- Både dilatering og erodering med *rektangulære* strukturelementer *bevarer* formen til hjørner
- **Dilatering** av hjørner med sirkulære strukturelementer:
    - Konkave hjørner bevarer sin form
    - Konvekse hjørner blir avrundet
- Omvendt for **erosjon** av hjørner med sirkulære strukturelementer:
    - Konkave hjørner blir avrundet
    - Konvekse hjørner bevarer sin form



Dualitet

- Dilasjon og erosjon er **duale**, dvs at vi kan uttrykke dem ved hjelp av hverandre:

$$f \oplus S = \left(f^c \ominus \hat{S}\right)^c$$
$$f \ominus S = \left(f^c \oplus \hat{S}\right)^c$$

Dualitet

- Dilasjon og erosjon er **duale**, dvs at vi kan uttrykke dem ved hjelp av hverandre:

$$f \oplus S = \left(f^c \ominus \hat{S}\right)^c$$
$$f \ominus S = \left(f^c \oplus \hat{S}\right)^c$$

- $\Rightarrow$ Vi kan utføre dilasjon og erosjon ved samme prosedyre så lenge vi kan rotere S 180 grader og finne komplementet til et binært bilde!

Bildet f

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Komplementet f^c

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Dilatert med

0	1	0
1	1	1
0	1	0

gir

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Erodert med

0	1	0
1	1	1
0	1	0

gir

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Dualitet og effekter av sirkulære strukturelementer på hjørner

- **Erosjon** finner posisjoner der strukturelementet passer inni forgrunnen
- **Dilasjon** finner posisjoner der det 180 grader roterte strukturelementet passer inni bakgrunnen, for så komplementere resultatet, $f \oplus S = \left(f^c \ominus \hat{S}\right)^c$
- Erosjon med sirkulært strukturelement: avrunder <u>konkave</u> hjørner
  Dilasjon med sirkulært strukturelement: avrunder <u>konvekse</u> hjørner

Dualitet og effekter av sirkulære strukturelementer på hjørner

- **Erosjon** finner posisjoner der strukturelementet passer inni forgrunnen
- **Dilasjon** finner posisjoner der det 180 grader roterte strukturelementet passer inni bakgrunnen, for så komplementere resultatet, $f \oplus S = \left(f^c \ominus \hat{S}\right)^c$
- Erosjon med sirkulært strukturelement: avrunder konkave hjørner
  Dilasjon med sirkulært strukturelement: avrunder konvekse hjørner

Konvekst forgrunns-hjørne er også et konkavt bakgrunns-hjørne

Dilasjon: Andre egenskaper

- Dilasjon er *kommutativ*: $f \oplus S = S \oplus f$
- Dilasjon er *assosiativ*: $f \oplus (S_1 \oplus S_2) = (f \oplus S_1) \oplus S_2$

Erosjon: Andre egenskaper

- Erosjon er ikke kommutativ: $f \ominus S \neq S \ominus f$
- Erosjon er ikke assosiativ, men har heller $(f \ominus S_1) \ominus S_2 = f \ominus (S_1 \oplus S_2)$

Erosjon: Andre egenskaper

- Erosjon er ikke kommutativ: $f \ominus S \neq S \ominus f$
- Erosjon er ikke assosiativ, men har heller $(f \ominus S_1) \ominus S_2 = f \ominus (S_1 \oplus S_2)$

  Passer dette med tidligere påstand (s. 13)?
  "Hvis strukturelementet S_2 er dobbelt så stort som strukturelementet S_1, er $f \ominus S_2 \approx (f \ominus S_1) \ominus S_1$"

Åpning

- **Erosjon**: fjerner alle strukturer som ikke kan inneholde strukturelementet og krymper andre strukturer

Åpning

- Erosjon: fjerner alle strukturer som ikke kan inneholde strukturelementet og krymper andre strukturer
- Dilasjon av resultatet med samme strukturelement kan vi omtrentlig gjenskape de strukturene som “overlevde” erosjonen

Åpning

- **Erosjon**: fjerner alle strukturer som ikke kan inneholde strukturelementet og krymper andre strukturer
- Dilasjon av resultatet med samme strukturelement kan vi omtrentlig gjenskape de strukturene som “overlevde” erosjonen
- **Morfologisk åpning**: $f \circ S = (f \ominus S) \oplus S$

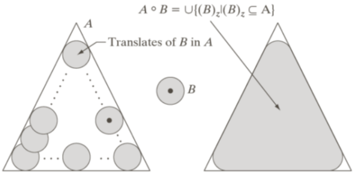
Åpning

- **Erosjon**: fjerner alle strukturer som ikke kan inneholde strukturelementet og krymper andre strukturer
- Dilasjon av resultatet med samme strukturelement kan vi omtrentlig gjenskape de strukturene som "overlevde" erosjonen
- **Morfologisk åpning**: $f \circ S = (f \ominus S) \oplus S$
- Åpning i form av at operasjonen kan skape en åpning mellom to strukturer som henger sammen ved en tynn linje/"bro" uten å krympe strukturene i betydelig grad

Geometrisk tolkning av åpning

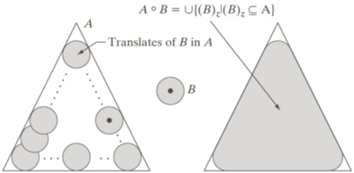
Tenk at strukturelementet definerer størrelsen og formen til spissen av en tusjpenn

Deler av Figur 9.8 i DIP-boka



Geometrisk tolkning av åpning

Tenk at strukturelementet definerer størrelsen og formen til spissen av en tusjpenn

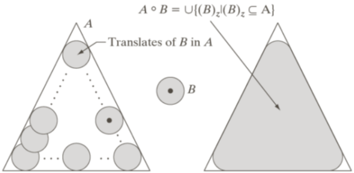


Deler av Figur 9.8 i DIP-boka

Det er bare tillatt å fargelegge innenfor objekter og tusjen må være vinkelrett på overflaten

Geometrisk tolkning av åpning

Tenk at strukturelementet definerer størrelsen og formen til spissen av en tusjpenn



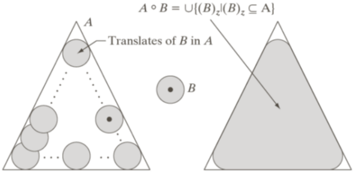
Deler av Figur 9.8 i DIP-boka

Det er bare tillatt å fargelegge innenfor objekter og tusjen må være vinkelrett på overflaten

Åpningen er resultatet av å fargelegge så mye man har lov til

Geometrisk tolkning av åpning

Tenk at strukturelementet definerer størrelsen og formen til spissen av en tusjpenn



Deler av Figur 9.8 i DIP-boka

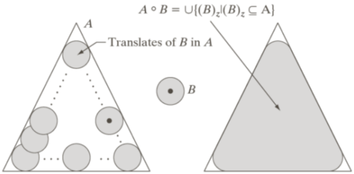
Det er bare tillatt å fargelegge innenfor objekter og tusjen må være vinkelrett på overflaten

Åpningen er resultatet av å fargelegge så mye man har lov til

For runde strukturelementer: Konvekse hjørner blir avrundet, konkave hjørner beholdes

Geometrisk tolkning av åpning

Tenk at strukturelementet definerer størrelsen og formen til spissen av en tusjpenn



Deler av Figur 9.8 i DIP-boka

Det er bare tillatt å fargelegge innenfor objekter og tusjen må være vinkelrett på overflaten

Åpningen er resultatet av å fargelegge så mye man har lov til

For runde strukturelementer: <u>Konvekse hjørner</u> blir avrundet, <u>konkave hjørner</u> beholdes

Åpning er *idempotent*: $(f \circ S) \circ S = f \circ S$

Lukking

- Dilasjon: Utvider strukturer, fyller hull og innbuktninger i omriss

Lukking

- **Dilasjon**: Utvider strukturer, fyller hull og innbuktninger i omriss
- Erosjon av resultatet med samme strukturelement vil strukturene stort sett få gjenskapt sin opprinnelige størrelse og form, men uten hull og innbuktninger som ble fylt ved dilasjon

Lukking

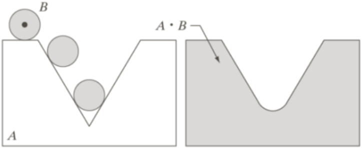
- **Dilasjon**: Utvider strukturer, fyller hull og innbuktninger i omriss
- Erosjon av resultatet med samme strukturelement vil strukturene stort sett få gjenskapt sin opprinnelige størrelse og form, men uten hull og innbuktninger som ble fylt ved dilasjon
- **Morfologisk lukking**: $f \bullet S = (f \oplus S) \ominus S$

Lukking

- **Dilasjon**: Utvider strukturer, fyller hull og innbuktninger i omriss
- Erosjon av resultatet med samme strukturelement vil strukturene stort sett få gjenskapt sin opprinnelige størrelse og form, men uten hull og innbuktninger som ble fylt ved dilasjon
- **Morfologisk lukking**: $f \bullet S = (f \oplus S) \ominus S$
- Lukking i form av at operasjonen kan lukke en åpning mellom to strukturer som er skilt ved et lite gap, uten av strukturene i seg selv vokser i betydelig grad

Geometrisk tolkning av lukking

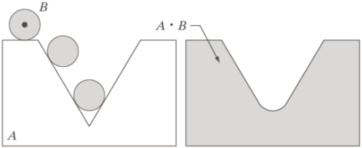
- Tilsvarende metafor som for åpning: Strukturelement definerer størrelsen og formen til tuppen av en tusj som holdes vinkelrett på flaten



Deler av Figur 9.9 i DIP-boka

Geometrisk tolkning av lukking

- Tilsvarende metafor som for åpning: Strukturelement definerer størrelsen og formen til tuppen av en tusj som holdes vinkelrett på flaten

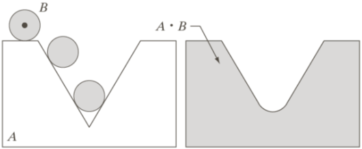


Deler av Figur 9.9 i DIP-boka

- Denne gangen er det bare tillatt å fargelegge utenfor objekter (her skal tusj holdes speilvendt/180 graders roterrt av strukturelementet)

Geometrisk tolkning av lukking

- Tilsvarende metafor som for åpning: Strukturelement definerer størrelsen og formen til tuppen av en tusj som holdes vinkelrett på flaten

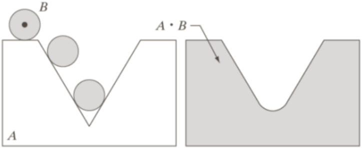


Deler av Figur 9.9 i DIP-boka

- Denne gangen er det bare tillatt å fargelegge utenfor objekter (her skal tusj holdes speilvendt/180 graders roterrt av strukturelementet)
- Lukkingen er det som ikke skal fargelegges

Geometrisk tolkning av lukking

- Tilsvarende metafor som for åpning: Strukturelement definerer størrelsen og formen til tuppen av en tusj som holdes vinkelrett på flaten



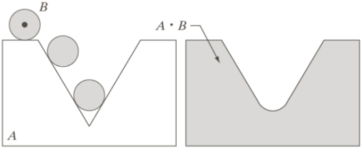
Deler av Figur 9.9 i DIP-boka

- Denne gangen er det bare tillatt å fargelegge utenfor objekter (her skal tusj holdes speilvendt/180 graders roterrt av strukturelementet)
- Lukkingen er det som ikke skal fargelegges
- For runde strukturelementer: Konkave hjørner blir avrundet, konvekse hjørner beholdes

Geometrisk tolkning av lukking

- Tilsvarende metafor som for åpning: Strukturelement definerer størrelsen og formen til tuppen av en tusj som holdes vinkelrett på flaten

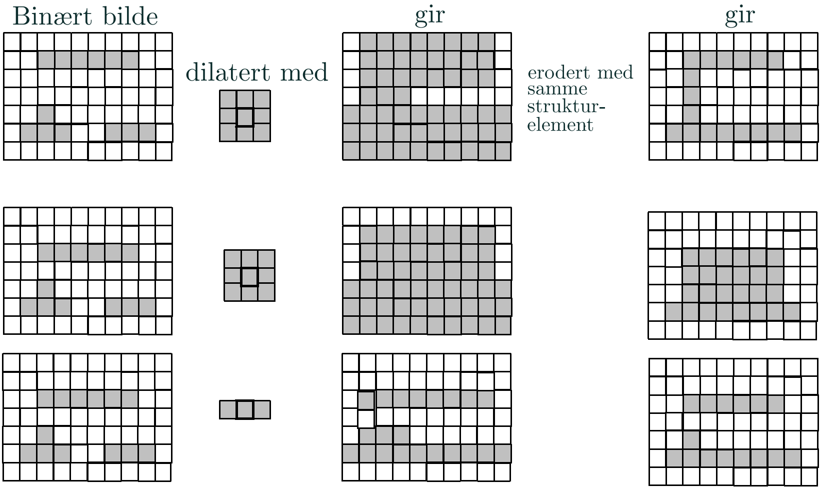
Deler av Figur 9.9 i DIP-boka



- Denne gangen er det bare tillatt å fargelegge utenfor objekter (her skal tusj holdes speilvendt/180 graders roterrt av strukturelementet)
- Lukkingen er det som ikke skal fargelegges
- For runde strukturelementer: Konkave hjørner blir avrundet, konvekse hjørner beholdes

Lukking er idempotent: $(f \bullet S) \bullet S = f \bullet S$

Lukking lukker små åpninger



Vi lar grått være forgrunn og hvit være bakgrunn i dette eksempelet

Dualitet mellom åpning og lukking

- Lukking er en dual operasjon til åpning:

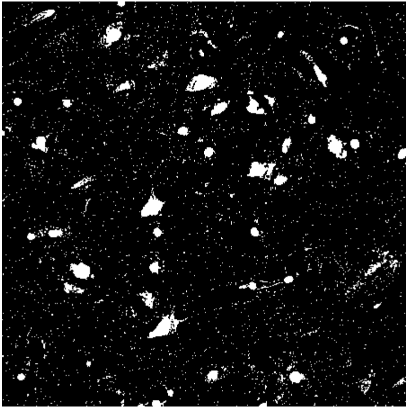
$$
\begin{aligned}
f \bullet S &= \left(f^c \circ \hat{S}\right)^c \\
f \circ S &= \left(f^c \bullet \hat{S}\right)^c
\end{aligned}
$$

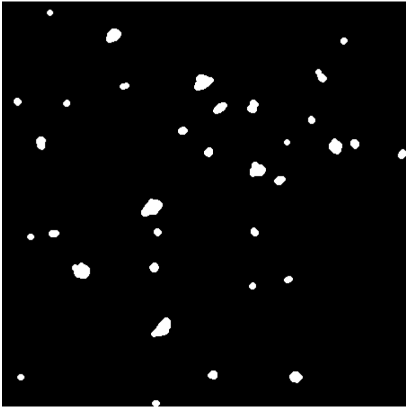
- Kan utføre begge operasjonene med kode bare for den ene, hvis vi kan speilvende og komplementere et binært bilde!
- **Lukking** er *ekstensiv* transformasjon (piksler legges til)
- **Åpning** er *antiekstensiv* transformasjon (piksler fjernes)

$$
f \circ S \subseteq f \subseteq f \bullet S
$$

Eksempel: Støyfjerning med åpning

Åpning med 7×7 sirkulært strukturelement



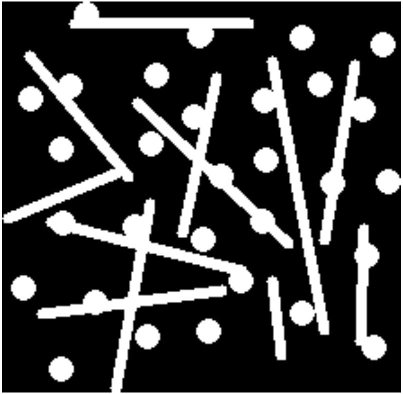


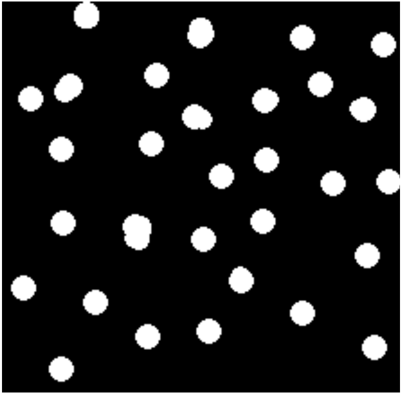
I dette eksempelet er hvit forgrunn og svart bakgrunn

Bildene er hentet fra `https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/`

Eksempel: Form-åpning ved åpning

Åpning med et sirkulært strukturelement





I dette eksempelet er hvit forgrunn og svart bakgrunn

Lukking ved et 3×3 kvadratisk strukturelement

I dette eksempelet er hvit forgrunn og svart bakgrunn

Eksempel på anvendelse: Granulometry

- Granulometry: Bestemme fordeling av størrelse til "partikler" i bildet
- Antar objekter med regulært form på en bakgrunn
- Tanke: Utfør en rekke åpninger ved å øke radius r på strukturelement
- Regne ut sum av alle piksler etter åpning
- Finn differanse i sum mellom radius r og radius $r - 1$ og plott summen som funksjon av radius

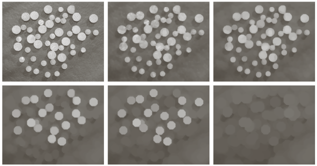


FIGURE 9.41 (a) 531 × 675 image of wood dowels. (b) Smoothed image. (c)–(f) Openings of (b) with disks of radii equal to 10, 20, 25, and 30 pixels, respectively. (Original image courtesy of Dr. Steve Eddins, The MathWorks, Inc.)

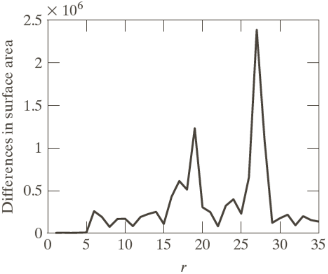


FIGURE 9.42 Differences in surface area as a function of SE disk radius, r. The two peaks are indicative of two dominant particle sizes in the image.

Eksempel: Filtrering ved åpning og lukking

FIGURE 9.11
(a) Noisy image.
(b) Structuring element.
(c) Eroded image.
(d) Opening of A.
(e) Dilation of the opening.
(f) Closing of the opening.
(Original image courtesy of the National Institute of Standards and Technology.)

“Hit-or-miss”-transformasjonen

- Har bilde f og strukturelement S

"Hit-or-miss"-transformasjonen

- Har bilde f og strukturelement S
- Lar S være definert ved $\{S_1, S_2\}$, som er to strukturelementer som har ikke noe til felles

"Hit-or-miss"-transformasjonen

- Har bilde f og strukturelement S
- Lar S være definert ved $\{S_1, S_2\}$, som er to strukturelementer som har ikke noe til felles
- **"Hit-or-miss"-transformasjonen:**

$$f \circledast S = f \circledast \{S_1, S_2\} = (f \ominus S_1) \cap (f^c \ominus S_2)$$

“Hit-or-miss”-transformasjonen

- Har bilde f og strukturelement S
- Lar S være definert ved $\{S_1, S_2\}$, som er to strukturelementer som har ikke noe til felles
- **“Hit-or-miss”-transformasjonen:**

$$f \circledast S = f \circledast \{S_1, S_2\} = (f \ominus S_1) \cap (f^c \ominus S_2)$$

- Vi får en forgrunnspiksel i utbildet bare hvis
  - S_1 passer forgrunnen rundt pikselen **og**
  - S_2 passer bakgrunnen rundt pikselen
- Kan brukes til finne/behandle visse mønstre i et bilde, f.eks ved
  - Finne bestemte strukturer
  - Fjerne enkeltpiksler
  - Brukt til tynning

Eksempel: “Hit-or-miss”

$$\begin{matrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{matrix}$$

Et bilde A

$$\begin{matrix}
0&1&0\\
1&\boxed{1}&1\\
0&1&0
\end{matrix}$$

Strukturelement S_1

$$\begin{matrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{matrix}$$

Resultat etter erosjon med S_1

$$\begin{matrix}
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1\\
1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1&1\\
1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1\\
1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1\\
1&1&1&1&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{matrix}$$

A^c - komplementet til bildet
(er 1 utenfor randen)

$$\begin{matrix}
1&0&1\\
0&\boxed{0}&0\\
1&0&1
\end{matrix}$$

Strukturelement S_2

$$\begin{matrix}
1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&1\\
1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1\\
1&0&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&0&1&0&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&1&1&1&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{matrix}$$

A^c erodert med S_2

$$\begin{matrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{matrix}$$

«Hit-or-miss»-resultatet

Logisk AND av de to delresultatene

Morfologisk tynning

Morfologisk tynning:
$$\begin{aligned} f_k &= f_{k-1} \otimes S_k \\ &= f_{k-1} - (f_{k-1} \circledast S_k), k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

der $f_0 = f$ og f innbildet. Fortsetter inntil *ingen* av strukturelementene skaper noen endring

Morfologisk tynning

Morfologisk tynning:

$$
\begin{aligned}
f_k &= f_{k-1} \otimes S_k \\
&= f_{k-1} - (f_{k-1} \circledast S_k), k = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

der $f_0 = f$ og f innbildet. Fortsetter inntil *ingen* av strukturelementene skaper noen endring

Fjerner grovt sett alle piksler bortsett fra som:

- er isolerte
- definerer utstrekningen av et objekt
- trengs for å ikke dele et objekt i mindre deler

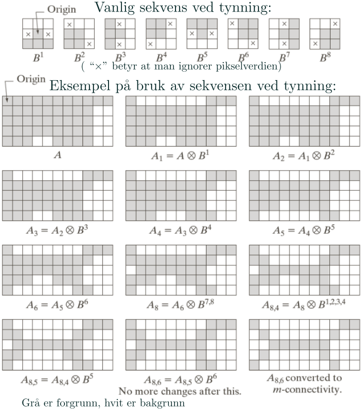
Morfologisk tynning

Morfologisk tynning:
$$\begin{aligned} f_k &= f_{k-1} \otimes S_k \\ &= f_{k-1} - (f_{k-1} \circledast S_k), k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

der $f_0 = f$ og f innbildet. Fortsetter inntil *ingen* av strukturelementene skaper noen endring

Fjerner grovt sett alle piksler bortsett fra som:

- er isolerte
- definerer utstrekningen av et objekt
- trengs for å ikke dele et objekt i mindre deler



Oppsummering

- Strukturelement med origo

Oppsummering

- Strukturelement med origo
- Erosjon

Oppsummering

- Strukturelement med origo
- **Erosjon**
- **Dilasjon**

Oppsummering

- Strukturelement med origo
- Erosjon
- Dilasjon
- Dualitet

Oppsummering

- Strukturelement med origo
- **Erosjon**
- **Dilasjon**
- Dualitet
- Åpning

Oppsummering

- Strukturelement med origo
- **Erosjon**
- **Dilasjon**
- Dualitet
- Åpning
- Lukking

Oppsummering

- Strukturelement med origo
- **Erosjon**
- **Dilasjon**
- Dualitet
- Åpning
- Lukking
- "Hit-or-miss"

Oppsummering

- Strukturelement med origo
- **Erosjon**
- **Dilasjon**
- Dualitet
- Åpning
- Lukking
- “Hit-or-miss”
- Tynning

Oppsummering

- Strukturelement med origo
- **Erosjon**
- **Dilasjon**
- Dualitet
- Åpning
- Lukking
- "Hit-or-miss"
- Tynning
- Tenk over sammenligner med filtrerting!