
IN2070 – Digital bildebehandling

FORELESNING 8

FILTRERING I BILDEDOMENET – II

Andreas Kleppe

Høypassfiltrering: Bildeforbedring og kantdeteksjon

1. derivert: Gradient-operatorer
2. derivert: Laplace-operatoren og LoG-operatoren
Cannys kantdetektor

Modifisering av forelesningsnotater laget av Fritz Albregtsen

G&W 3rd Ed.: 3.6 og 10.2-10.2.6

G&W 4th Ed.: 3.6 og 10.2 t.o.m. «The Canny edge detector»

Høypassfiltre

- Slipper gjennom høye frekvenser, og demper eller fjerner lave frekvenser.
- Effekt:
 - Demper langsomme variasjoner, f.eks. ujevn bakgrunn.
 - Framhever skarpe kanter, linjer og detaljer.
- Typiske mål: «Forbedre» skarpheten, detektere kanter.
- **Q**: Hva skjer med støy?

Høypassfiltrering med konvolusjon

- Summen av vektene i konvolusjonsfilteret er typisk 0.
 - **Q**: Hvorfor er dette lurt når vi skal høypassfiltrere?
 - **Q**: For lavpassfiltre, hva valgte vi gjerne denne summen som?
- Da blir også summen av ut-bildets pikselverdier = 0.
 - Antar nullutvidelse og bruker alle posisjoner med overlapp.
- => **Positive** og **negative** pikselverdier i ut-bildet.
- Ikke alltid en god ide å bruke $|g(x,y)|$!
- For framvisning: Gjør $g(x,y)$ positiv ved å addere en konstant og skalér resultatet til et ønsket intervall.

Høypassfiltrering med konvolusjon (kursorisk)

- Når summen av vektene i konvolusjonsfilteret er 0, så blir også summen av ut-bildets pikselverdier 0.
 - Antar nullutvidelse og bruker alle posisjoner med overlapp.

$$\begin{aligned}\sum_{x=-a}^{M-1+a} \sum_{y=-b}^{N-1+b} (h * f)(x, y) &= \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \sum_{x=-a}^{M-1+a} \sum_{y=-b}^{N-1+b} h(s, t) f(x - s, y - t) \\ &\stackrel{\text{antar nullutvidelse}}{=} \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \sum_{x=s}^{M-1+s} \sum_{y=t}^{N-1+t} h(s, t) f(x - s, y - t) \\ &= \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} h(s, t) f(m, n) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left(f(m, n) \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b h(s, t) \right) = 0\end{aligned}$$

Punkt-deteksjon

- Eksempel på et høypassfilter; Konvolusjonsfilteret:
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Dette filteret kan bl.a. brukes til deteksjon av isolerte punkter:

- Beregn konvolusjonen av filteret, betegnet h , og inn-bildet f :
$$g(x, y) = \sum_{s=x-1}^{x+1} \sum_{t=y-1}^{y+1} h(x-s, y-t) f(s, t)$$

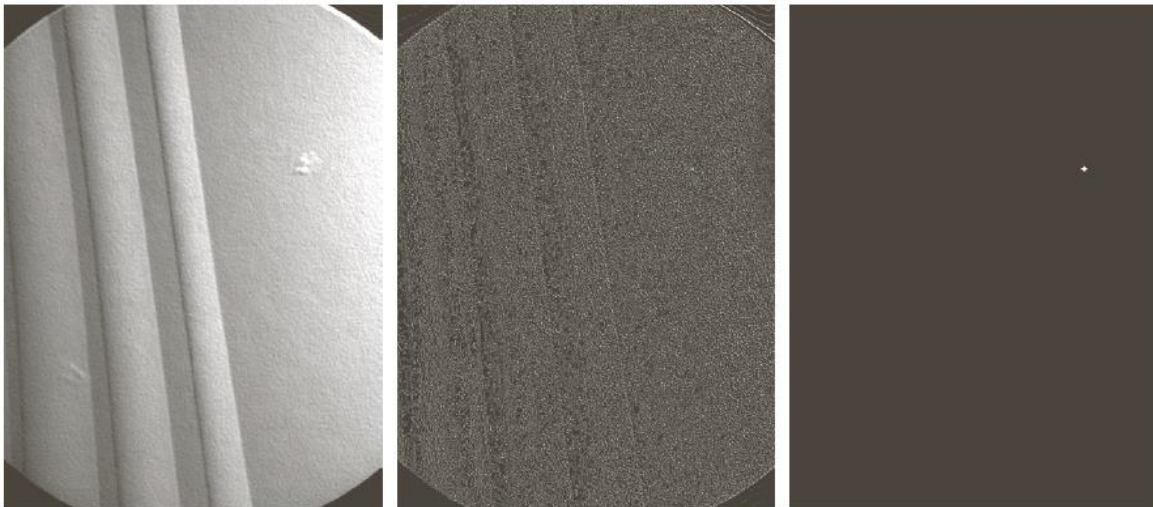
- Isolerte punkter vil skille seg ut med høy respons (i absoluttverdi).
- For passende terskel $T > 0$ er de detektert punktene: $|g(x, y)| \geq T$

- **Q:** Hva er responsen i homogene områder?
- **Q:** Hva med i en hellende gråtone-flate?

Eksempel: Punkt-deteksjon

- **Oppgave:** Deteksjon av pore i turbinblad.

| | | |
|---|----|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | -8 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |



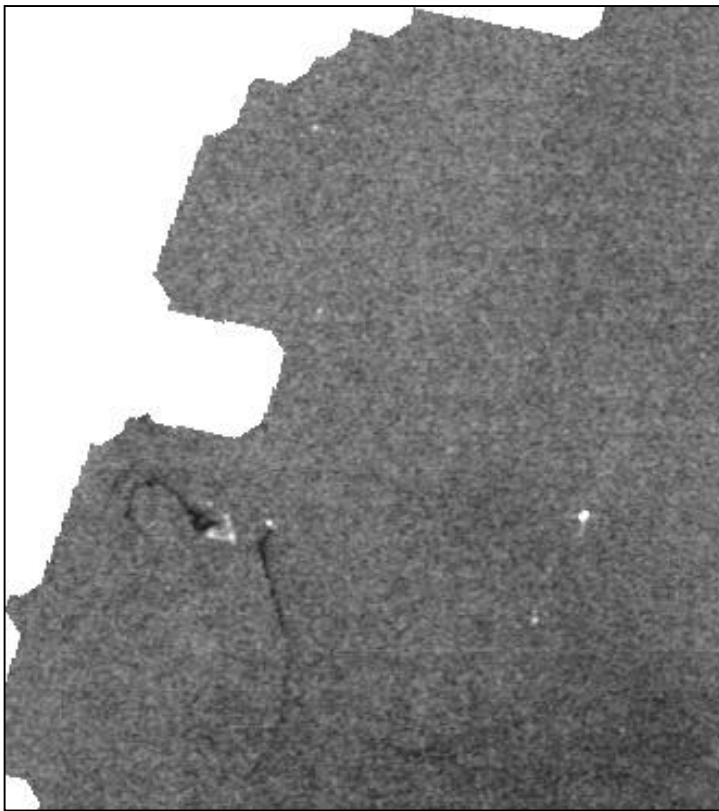
a
b c d

FIGURE 10.4

(a) Point detection (Laplacian) mask. (b) X-ray image of turbine blade with a porosity. The porosity contains a single black pixel. (c) Result of convolving the mask with the image. (d) Result of using Eq. (10.2-8) showing a single point (the point was enlarged to make it easier to see). (Original image courtesy of X-TEK Systems, Ltd.)

Eksempel: Punkt-deteksjon

- **Oppgave:** Deteksjon av skip i radar-bilde over sjø.



- De små lyse punktene er skipene.

- Filteret \longrightarrow $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
vil gi flere høye responser for hvert skip.

– Og nesten like høy respons i kanter og spesielt hjørner.

- Bedre å bruke et større filter av samme «type», f.eks.:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 4 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 8 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & 4 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Bildeforbedring ved høypassfiltrering

- Konvolusjonsfilteret \longrightarrow kan også brukes til bildeforbedring.
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
- Grunntanke:
 - Filtreringen detekterer starten og slutten av kanter.
 - Andre områder blir omtrent 0.
 - Derfor:
Ved å **addere filtreringen til originalen** får vi sterkere kanter \rightarrow bildet oppfattes som skarpere.

Eksempel: Bildeforbedring ved høypassfiltrering

- **Oppgave:**
Øk skarpheten
i følgende bilde:

- **Mulig løsning:**
 1. Filtrer med \longrightarrow
 2. Summer filtreringen og originalen.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$



G&W fig. 3.46
(3.38 i 3rd Ed.):

← Original

Resultat →



Bildeforbedring ved høypassfiltrering

- Konvolusjonsfilteret vi har sett på kan uttrykkes slik:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{høypass} = \text{original} - \text{lavpass}$$

Husk:
Konvolusjon er
distributiv:
 $f*(g+h)$
 $= (f*g) + (f*h)$

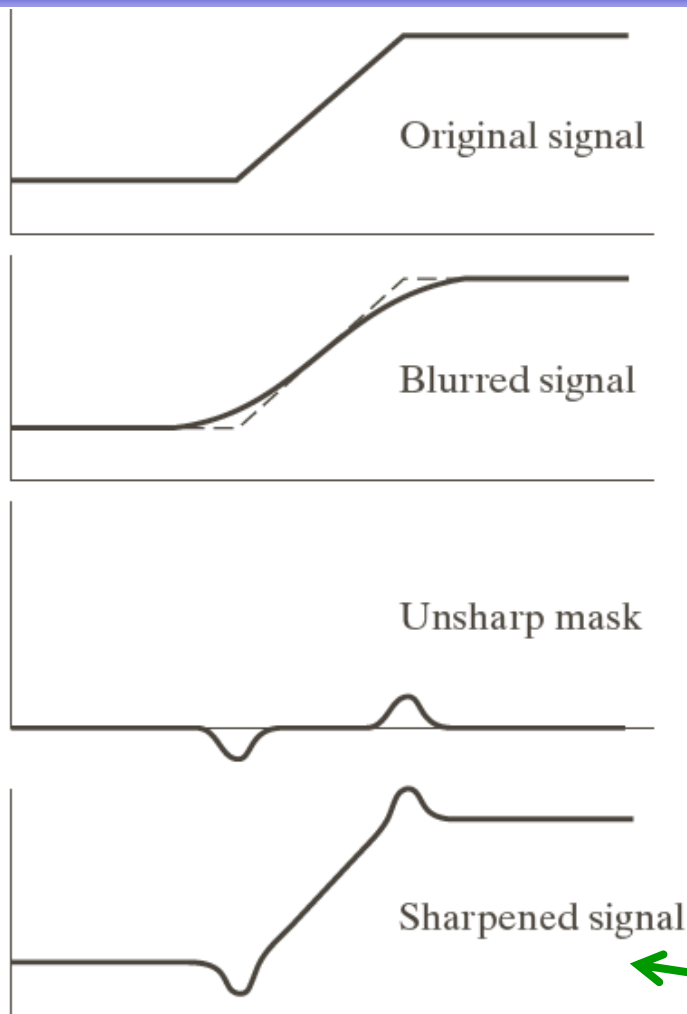
- Bildeforbedringen vi har sett på tilsvarer altså tre steg:

- Lavpassfiltrér med 3x3-middelverdifilter.
- Subtraher resultatet fra originalen.
- Adder k *differansen fra pkt. 2 til originalen.

Husk: Konvolusjon er
assosiativ ved skalar
multiplikasjon:
 $a(f*g) = f*(ag)$

- Dette er én form for **«highboost»-filtrering**.

«Unsharp masking» og «highboost»-filtrering



G&W fig. 3.39

- Gitt et bilde (original):
(til venstre: et 1D-bilde av en rampe)

1. Lavpassfilter.
(til venstre er originalen stiplet)

2. Beregn differansen:
original – filtrering

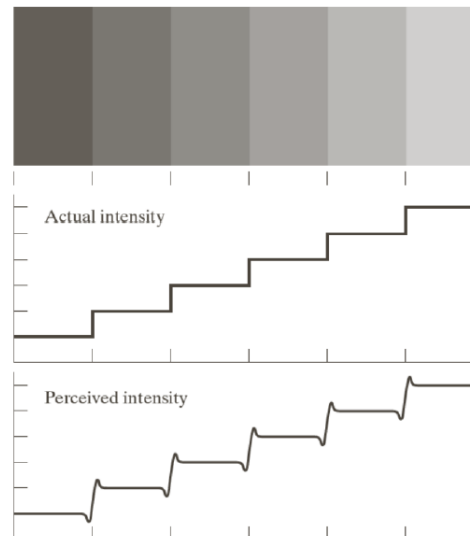
3. Resultatet er:
original + k • differansen

- k er en positiv konstant.
- **Unsharp masking**: $k = 1$
- **Highboost-filtrering**: $k > 1$

Fra introduksjons-forelesningen

Nevrale prosessorer i netthinna

- Forsterker kanter
- Stimulering av én del undertrykker stimulering av en annen del
- Øker kontrasten ved overgang mellom uniforme regioner
- Kalles for *Mach-bånd*



30

Eksempel: Unsharp masking


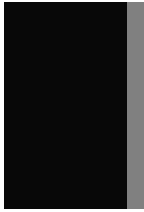

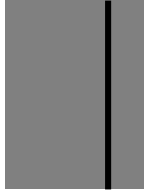
1. Lavpassfiltrering => uskarpt bilde.
 - Bruk f.eks. et middelvefilter.
2. Subtraher uskarpt bilde fra originalen.
 - Original – Lavpass = Høypass
3. Adder differansen til originalen.
 - Fremhever kanter, resultatet virker skarpere enn originalen.



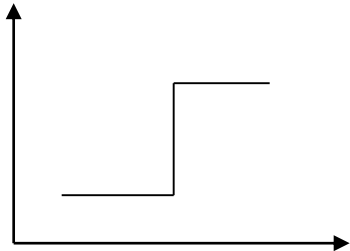
Motivasjon for kant-deteksjon

- Det meste av **informasjonen** i et bilde finnes ved **kantene** til objektene/regionene i bildet.
 - Med «kanter» menes her intensitets-kanter, farge-kanter, tekstur-kanter osv.
- Biologiske visuelle systemer er basert på kant-deteksjon.
- Slike systemer arbeider ofte både parallelt og sekvensielt:
 - Alle lokale omgivelser behandles uavhengig av hverandre.
 - Lokalt resultat kan være avhengig av tidligere resultater.

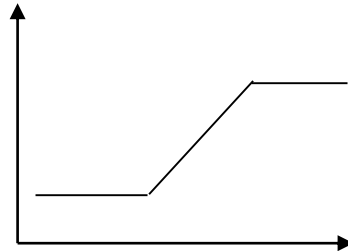
Intensitets-flater, -kanter og -linjer

- **Homogen flate:** Et område der alle pikselverdiene er like. 
- **Kant:** Overgangen mellom to områder med forskjellig middelvei.
 - **Steg-kant:** Én-piksels overgang. 
 - **Rampe:** Fler-piksels overgang med konstant intensitetsendring (dvs. konstant gradient). 
- «Kant» brukes også om skillepunktet mellom de to områdene.
 - Forskjellige måter å modellere hvor skiller er.
 - For steg-kanter:
 - Et alternativ er midt mellom nabo-piksler som tilhører forskjellig områder.
 - I segmentering ønsker man typisk å finne første piksel på den siden som tilhører objektet.
- Merk at en **linje** består av **to** kanter. 
 - Hver kant kan f.eks. være steg-kant eller rampe.
- Idealstrukturer er nyttig for modellering, men i praksis finner vi oftest strukturer som bare ligner.

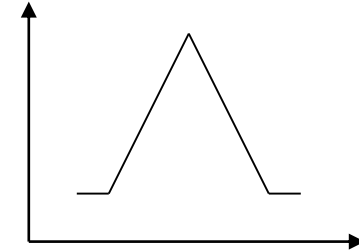
Kant-typer



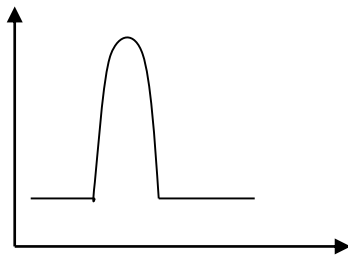
Steg-kant



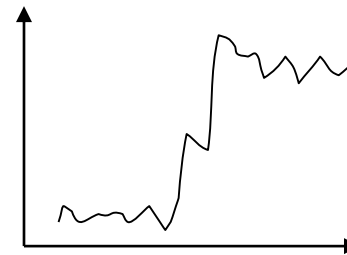
Rampe



Tak-kant



Linje
(litt glattet)



Steg-kant med støy

Digital derivasjon

- En kant kjennetegnes ved **endring i intensitetsverdi**.
 - Siden en intensitetskant er overgangen mellom to områder med forskjellig middelvei, så må intensiteten endres i kanten.

- Den **deriverte** av en funksjon $f(x)$ er definert som:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

og angir stigningstallet til f i punktet x ,
dvs. hvor mye f endrer seg i punktet x .

- Den deriverte er **ikke definert** for diskrete funksjoner, men vi kan **tilnærme** den ved å la $h \geq 1$ i definisjonen.
=> Tilnærme vba. **differanser mellom nærliggende piksler**.

Gradient

- Et digitalt bilde er en to-variabel, diskret funksjon.
- En kontinuerlig funksjon $f(x,y)$ kan deriveres mhp. x og y .
 - Kalles å partiell-derivere mhp. x og y .
 - Betegnes henholdsvis $\partial f(x,y)/\partial x$ og $\partial f(x,y)/\partial y$
- Vektoren av de to partiell-deriverte kalles **gradienten** og betegnes ∇f :

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Gradient i et kontinuerlig bilde

- Gradienten peker i retningen der funksjonen øker mest:

- Den retningsderiverte til f i retning θ (dvs. langs vektor r med lengde 1) er:

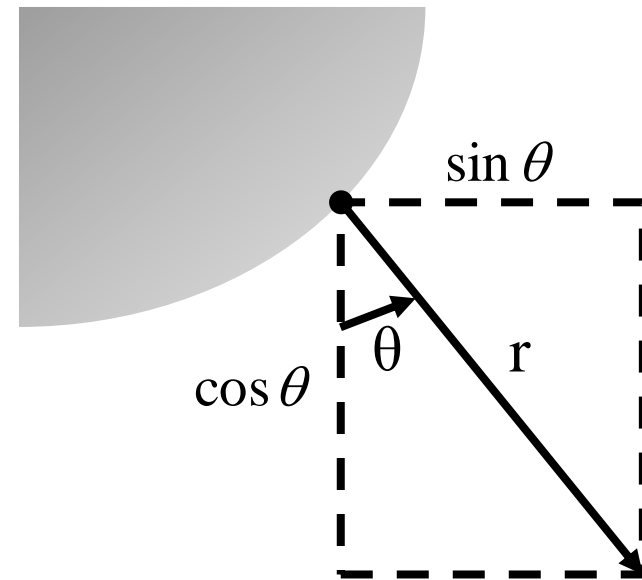
$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

- Når den retningsderiverte er størst er:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0$$

- Dvs. vinkelen θ_g der den retningsderiverte er størst oppfyller:

$$-\frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta_g + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta_g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta_g = \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta_g$$



Gradient i et kontinuerlig bilde

- Gjentar: Når den retningsderiverte er størst er vinkelen θ_g :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cos \theta_g = \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta_g \Rightarrow \frac{\sin \theta_g}{\cos \theta_g} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \Rightarrow \tan \theta_g = \frac{g_y}{g_x}$$

- Derfor: Gradienten peker i **retningen** der funksjonen **øker mest**:

$$\theta_g = \tan^{-1} \left(\frac{g_y}{g_x} \right)$$

Ved å dobbeltderivere den retningsderiverte mhp. θ kan man vise at funksjonen øker mest med gradientretningen og avtar mest mot gradientretning.

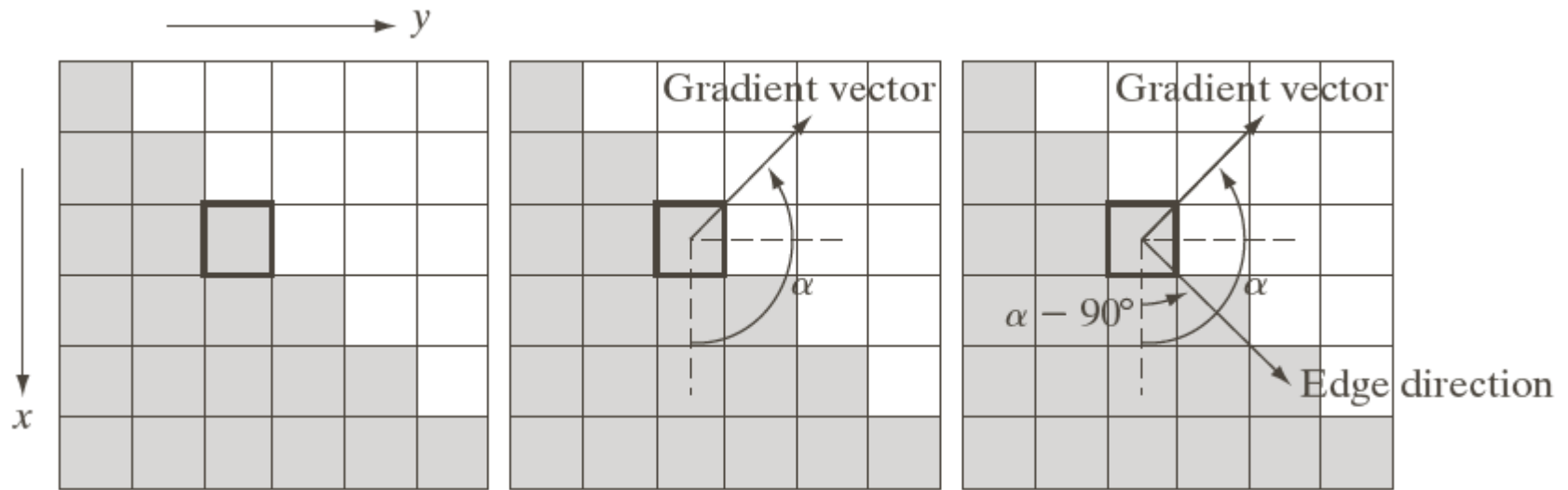
og økningen her, som kalles **gradient-magnituden**, er:

$$\frac{\partial f}{\partial r_g} = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

$\partial f / \partial r_g$ er den retningsderiverte i gradientretningen.

Gradient \perp Kant

- **Gradienten** peker i retningen der funksjonen **øker mest** og **kanten** går **vinkelrett på gradienten**.



a b c

FIGURE 10.12 Using the gradient to determine edge strength and direction at a point. Note that the edge is perpendicular to the direction of the gradient vector at the point where the gradient is computed. Each square in the figure represents one pixel.

Digitale gradient-tilnærminger

- Vi ønsker å tilnærme gradienten med **differanser mellom nærliggende piksler.**
- Til dette kan vi bruke to konvolusjonsfiltre som tilnærmer hver sin gradient-komponent.
 - To slike konvolusjonsfiltre kalles en **gradient-operator.**
 - Konvolusjonsfiltrene betegnes ofte som h_x og h_y
 - F.eks. h_x tilnærmer den partiell-derivert i x -retning ved å beregne differansen i vertikal retning av nærliggende piksler.
- Mange muligheter!

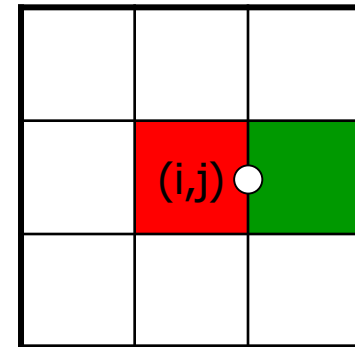
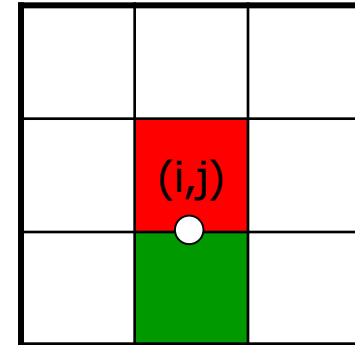
Digitale gradient-tilnærminger

- Asymmetrisk 1D-operator:

$$g_x(i,j) = f(i+1,j) - f(i,j)$$

$$g_y(i,j) = f(i,j+1) - f(i,j)$$

- Definisjonene er gitt slik at gradient-komponentene er positive for en kant der intensiteten øker nedover og fra venstre mot høyre i bildet.



- Problemer med denne operatoren:
 - Hvert av gradient-komponent-estimatene refererer til et punkt midt mellom to piksler.
 - x - og y -estimatet refererer ikke til samme punkt i bildet.

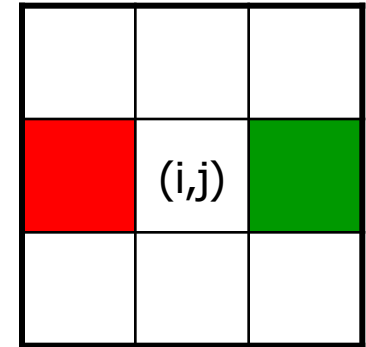
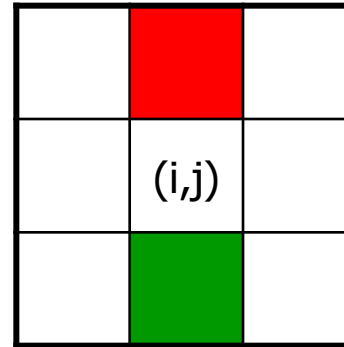
Digitale gradient-tilnærminger

- Symmetrisk 1D-operator:

$$g_x(i,j) = f(i+1,j) - f(i-1,j)$$

$$g_y(i,j) = f(i,j+1) - f(i,j-1)$$

- **x- og y-estimatet refererer nå begge til (i,j).**



Merk at: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

Hvilket betyr at:

Husk: Konvolusjon er kommutativ:

$$f * g = g * f$$

- Hvert av konvolusjonsfiltrene i den symmetriske 1D-operatoren kan beregnes ved å:
 1. Konvolvare med tilhørende filter i den asymmetriske 1D-operatoren.
 2. Konvolvare resultatet med et 1x2 (eventuelt 2x1) middelverdifilter.
- Litt glatting skiller den asymmetriske og symmetriske 1D-operatoren.
 - Glattingen er normalt sett uproblematisk, kanskje t.o.m. gunstig.

Gradient-operatorer

- Asymmetrisk 1D-operator:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Også kalt «pixel difference»-operatoren.

- Symmetrisk 1D-operator:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Også kalt «separated pixel difference»-operatoren.

- Roberts-operatoren (også kalt Roberts kryssgradient-operator):

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PS: Vi angir konvolusjonsfiltre i den hensikt at de skal brukes til konvolusjon.

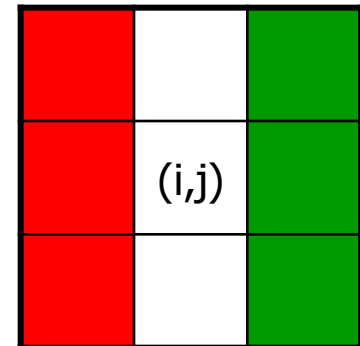
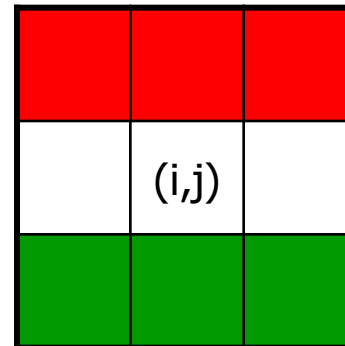
G&W angir filtermasker som skal brukes til korrelasjon.

Filtrene vil derfor avvike med en 180 graders rotasjon.

Digitale gradient-tilnærminger

- Problem: 1D-operatorene er veldig følsom for støy.
 - Støy kan da lett bli detektert som kanter.
- «Løsning»: Beregn differansen for tre symmetriske par:

- **Gradient-komponent-estimatene blir da mer robuste mot støy i bildet.**



Gradient-operatorer

- Prewitt-operatoren:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Sobel-operatoren:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Frei-Chen-operatoren:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

PS: Vi angir konvolusjonsfiltre i den hensikt at de skal brukes til konvolusjon. G&W angir filtermasker som skal brukes til korrelasjon. Filtrene vil derfor avvike med en 180 graders rotasjon.

Separasjon av gradient-operatorer

- Separasjon av Prewitt-operatoren:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} * [1 \ 1 \ 1] \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ -1] * \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Separasjon av Sobel-operatoren:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} * [1 \ 2 \ 1] \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ -1] * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Separasjon av Frei-Chen-operatoren:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} * [1 \ \sqrt{2} \ 1] \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ -1] * \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Egenskaper ved gradient-operatorer

- Operatoren gjøres mindre følsom for støy ved å lavpassfiltrere i én retning og derivere i den ortogonale retningen.
 - Sees tydelig fra separasjonene på forrige slide.
- Eksempler: Prewitt, Sobel, Frei-Chen.
- Prewitt er mer følsom for horisontale og vertikale enn for diagonale kanter.
- Det motsatte er tilfelle for Sobel.
- Frei-Chen gir samme gradient-magnitudo for kanter som ligger parallelt med en akse som for diagonale kanter.

Prewitt

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sobel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Frei-Chen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Gradient-beregning

- Vi finner de horisontale kantene:
 - Beregn: $g_x = h_x * f$
- Vi finner de vertikale kantene:
 - Beregn: $g_y = h_y * f$
- Beregn gradient-magnitude og -retning:

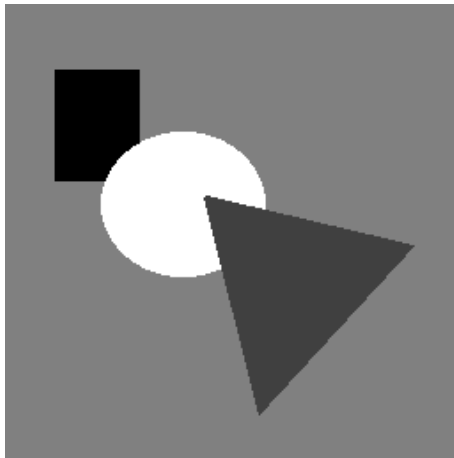
$$M(i, j) = \sqrt{g_x^2(i, j) + g_y^2(i, j)}$$

Gradient-magnitude

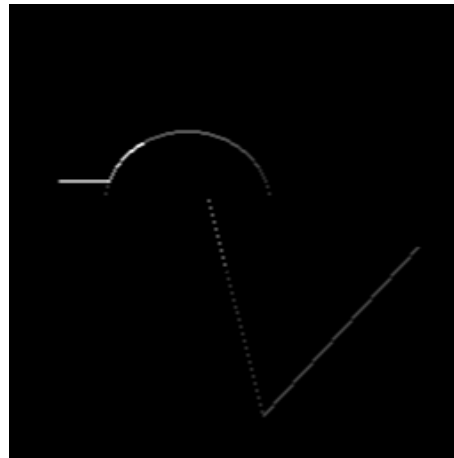
$$\theta(i, j) = \tan^{-1}\left(\frac{g_y(i, j)}{g_x(i, j)}\right)$$

Gradient-retning

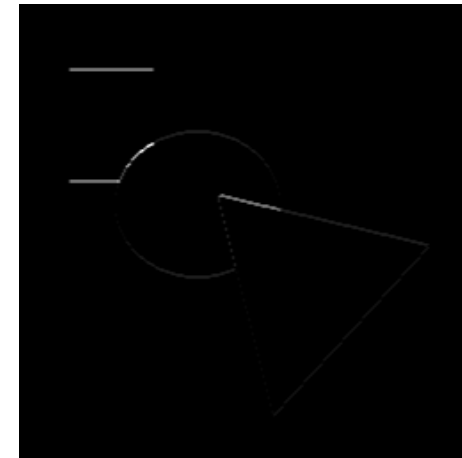
Eksempel: Gradient-beregning med Sobel-operatoren



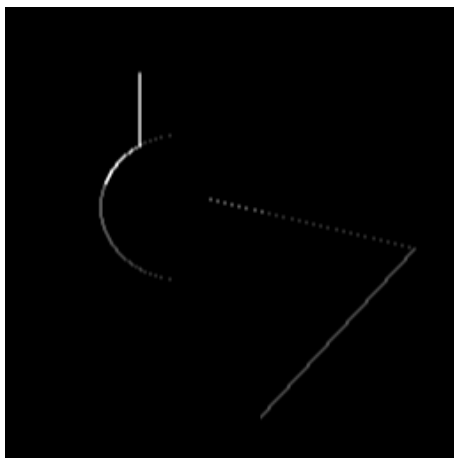
Inn-bilde f



$g_x = f * h_x$



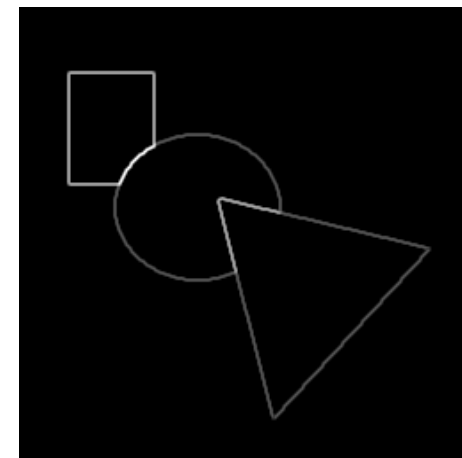
g_x^2



$g_y = f * h_y$



g_y^2



$(g_x^2 + g_y^2)^{1/2}$

Merk:
- Hvert bilde er skalert ved å dele på sitt maksimum.
- De negative verdiene i g_x og g_y er satt til 0 for denne fremvisningen.

Større gradient-operatorer

- Gradient-operatorer kan gjøres mer støy-robuste ved å bygge inn mer lavpassfiltrering.
- Eksempel: Følgende 5×5-Sobel-operator:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 12 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & -12 & -8 & -2 \\ -1 & -4 & -6 & -4 & -1 \end{bmatrix} \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & -8 & -4 \\ 6 & 12 & 0 & -12 & -6 \\ 4 & 8 & 0 & -8 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

er resultatet av konvolusjonene:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Implementasjoner av gradient-operatorer

- Som vanlig lurt å utnytte separabilitet.
- For 5x5-Sobel-operatoren på forrige foil:
 - Med 5x5-filtrene kreves 50 multiplikasjoner.
 - Ved bruk av de fire 3x3-filtrene kreves 36 multiplikasjoner.
 - Finnes mange måter man dele opp på, men det raskeste blir å separere 5x5-filtrene direkte:

$$h_x(i, j) = [1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1] * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad h_y(i, j) = [1 \quad 2 \quad 0 \quad -2 \quad -1] * \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Disse krever bare 20 multiplikasjoner.

Gradient til kant-deteksjon

- Gradient-magnituden indikerer **styrken av kanten** i en piksel.
- Kantene i gradient-magnitude-bildet blir typisk brede / tykke.
 - Kan være uønsket.
 - Bredden avhenger av størrelsen på filtrene og bredden på kanten i bildet.
- Mulige fremgangsmåter for å finne eksakt, tynn kant:
 - Terskle grad.mag. og tynne.
 - Finne maksimum i grad.mag. / bruke den andrederiverte.



Gradient til kant-deteksjon



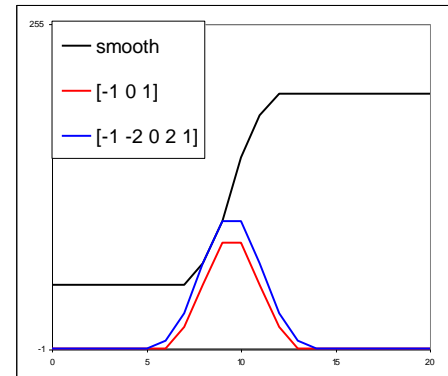
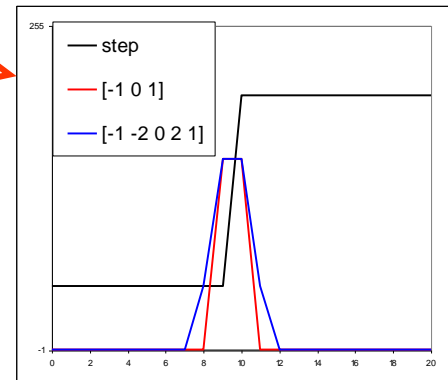
- Gradient-magnituden har «bred respons», men anta at vi ønsker eksakt, tynn kant.

- For en steg-kant:
 - Merk: Bredden på responsen er avhengig av størrelsen på filteret.

- For en bred kant (glattet med $[1\ 2\ 3\ 2\ 1]/9$):
 - Merk: Bredden på responsen er også avhengig av bredden på kanten.

• **Maksimum er likt og fornuftig lokalisert!**

- Bruke den andrederiverte til å finne maksima?



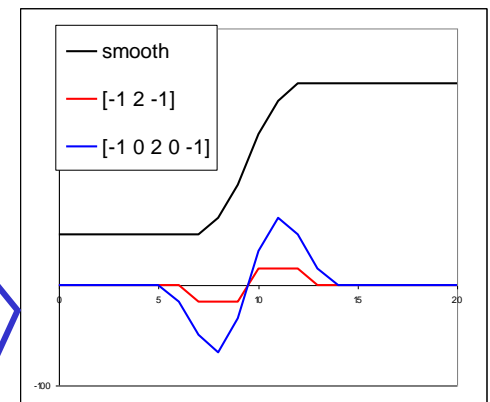
PS: Filtrene angitt i figurene til venstre er brukt til korrelasjon.

Laplace-operatoren

- Laplace-operatoren er gitt ved:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Den endrer fortegn der f har vendepunkt.
- $\nabla^2 f = 0$ markerer kant-posisjon.
- $|\nabla^2 f|$ har to ekstremverdier per kant; på starten og på slutten av kanten.
 - Derfor brukte vi den tidligere i dag til å forbedre bildeskarpheiten!



- Kantens eksakte posisjon er null-gjennomgangen.
- Dette gir tynne kanter.
- NB! Vi finner bare kant-posisjoner, ikke kant-retninger.

1D-Laplace-operator

| Kontinuerlig | Digitalt |
|-----------------------|--|
| $f(x)$ | $f[i]$ |
| $f'(x)$ | $f[i+1]-f[i]$ |
| $f''(x) = \nabla^2 f$ | $f'[i+1]-f'[i]$ $= (f[i+2]-f[i+1])$ $\quad - (f[i+1]-f[i])$ $= f[i+2]-2f[i+1]+f[i]$ |

- I 1D er $\nabla^2 f$ ekvivalent med den andrederiverte.
- Av symmetri-hensyn sentrerer vi om i .
- Dessuten bytter vi fortegn av konvensjon.
- Altså får vi:
 $-\nabla^2 f = -f[i-1] + 2f[i] - f[i+1]$

2D-Laplace-operator

- Anvend 1D-Laplace-tilnærmingen i begge retninger og summer:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 f &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &\approx -f(i-1, j) + 2f(i, j) - f(i+1, j) \\ &\quad - f(i, j-1) + 2f(i, j) - f(i, j+1) \end{aligned}$$

- Dette kan beregnes ved å konvolvare f med

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Full 3x3-Laplace-operator

- Hvis vi i tillegg anvender 1D-Laplace-tilnærmingen langs begge diagonaler og summerer, så får vi et uttrykk som kan beregnes ved å konvolvare f med

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Dette konvolusjonsfilteret brukte vi tidligere i dag til:
 - Punkt-deteksjon.
 - Å øke bildeskarpheiten.

Laplace på andregradspolynom

- La de lokale intensitetene omkring (x, y) være modellert ved andregradspolynomet $((m, n)$ er koordinater relativt til (x, y)):

$$f(m, n) = k_1 + k_2 m + k_3 n + k_4 m^2 + k_5 mn + k_6 n^2$$

- I et 3x3-naboskap rundt (x, y) har vi da intensitetene:

| | | |
|-------------------------------------|-------------------|-------------------------------------|
| $k_1 - k_2 - k_3 + k_4 + k_5 + k_6$ | $k_1 - k_2 + k_4$ | $k_1 - k_2 + k_3 + k_4 - k_5 + k_6$ |
| $k_1 - k_3 + k_6$ | k_1 | $k_1 + k_3 + k_6$ |
| $k_1 + k_2 - k_3 + k_4 - k_5 + k_6$ | $k_1 + k_2 + k_4$ | $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6$ |

- Den korrekte Laplace-verdien er her gitt ved:

$$-\nabla^2 f(x, y) = -\left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\right) = -2(k_4 + k_6)$$

- Både 4-nabo- og 8-nabo-Laplace-operatoren (høyre) gir korrekt estimat!

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sobel vs Laplace



Sobel-filtrering
=> bred kant



Laplace-filtrering
=> dobbelt-kant

Steg-kanter og steg-kantede linjer

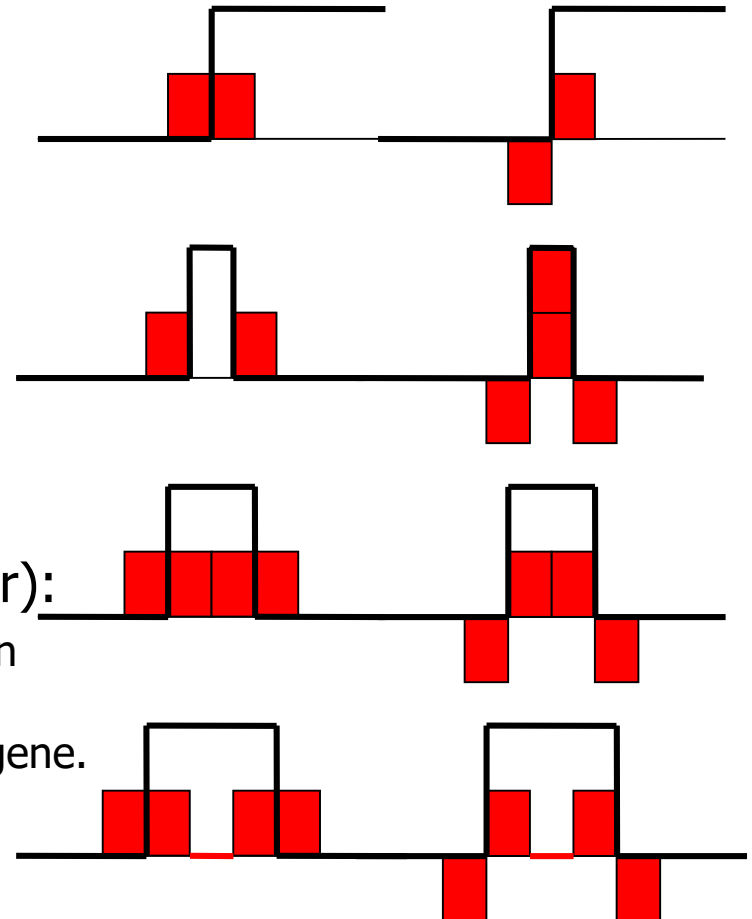
- Anta at vi bruker:
 - Symmetrisk 1D-operator for «Grad.mag.»:

$$f(i+1) - f(i-1)$$
 - 1D-Laplace-operatoren for «Laplace»:

$$-f(i-1) + 2f(i) - f(i+1)$$
- For steg-kanter får vi da:
 - Gradientmagnituden er lik i første piksel utenfor og i første piksel innenfor kanten.
 - Laplace gir responser med motsatt fortegn og riktig kant i null-gjennomgangen.
- På tvers av en linje (med to steg-kanter):
 - For en én-piksels linje er gradientmagnituden lik på hver side av linja og 0 i linja, mens Laplace gir riktige kanter i null-gjennomgangene.
 - For linjer med flere piksler blir det som beskrevet for steg-kanter (bare to ganger).

Grad.mag.

Laplace



Andre Laplace-operatorer

- Kan bl.a. finnes ved å bruke gradient-operatorer.
- Eksempel: Bruker 3x3-Sobel-operatoren:

$$\begin{aligned}
 -\nabla_{5 \times 5}^2 &= -\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= -\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -8 & -12 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -12 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & -4 \\ -4 & 8 & 24 & 8 & -4 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Implementasjon av Laplace-operatorer

- Generelt **ikke separable**.
- Flere Laplace-operatorer kan likevel **deles opp i 1D-operasjoner**.
- Eksempel: Laplace-operatoren fra forrige foil:

$$-\nabla_{5 \times 5}^2 = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 & -4 & -2 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & -4 \\ -4 & 8 & 24 & 8 & -4 \\ -4 & 0 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

er ikke separabel, men kan deles opp i 1D-operasjonene:

$$[1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1] * [-1 \ 0 \ 2 \ 0 \ -1]^T + [-1 \ 0 \ 2 \ 0 \ -1] * [1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1]^T$$

Krever da 37 operasjoner i stedet for 49 (vba. 5x5-filteret).

Fra Laplace til LoG

- Vi gjorde gradient-operatorene støy-robuste ved å bygge inn en lavpassfiltrering.
 - Eksempel: 3x3-Sobel-operatoren:

$$h_x(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} * [1 \ 2 \ 1] \quad h_y(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ -1] * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Vi kan gjøre det samme med en Laplace-operator.
- Det er vanlig å bygge inn et Gauss-filter G med gitt σ :

$$-\nabla^2 * (G * f) = (-\nabla^2 * G) * f = LoG * f$$

- $-\nabla^2$ er en Laplace-operator og

$LoG = -\nabla^2 * G$ er en **Laplacian-of-Gaussian-operator**.

Husk:
Konvolusjon er
assosiativ:
 $(f * g) * h = f * (g * h)$

En 7x7-LoG-operator

- Konvolverer vi 3x3-Gauss-tilnærmingen (uten skaleringsfaktoren 1/16):

$$G_{3 \times 3} = [1 \quad 2 \quad 1] * [1 \quad 2 \quad 1]^T$$

med Laplace-operatoren vil fikk ved å bruke 3x3-Sobel-operatoren:

$$-\nabla_{5 \times 5}^2 = [1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1] * [-1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad -1]^T + [-1 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad -1] * [1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1]^T$$

for å få følgende 7x7-LoG-operator:

$$LoG_{7 \times 7} = -\nabla_{5 \times 5}^2 * G_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -14 & -16 & -14 & -8 & -2 \\ -8 & -24 & -24 & -16 & -24 & -24 & -8 \\ -14 & -24 & 30 & 80 & 30 & -24 & -14 \\ -16 & -16 & 80 & 160 & 80 & -16 & -16 \\ -14 & -24 & 30 & 80 & 30 & -24 & -14 \\ -8 & -24 & -24 & -16 & -24 & -24 & -8 \\ -2 & -8 & -14 & -16 & -14 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

Også lavpassfiltrere?

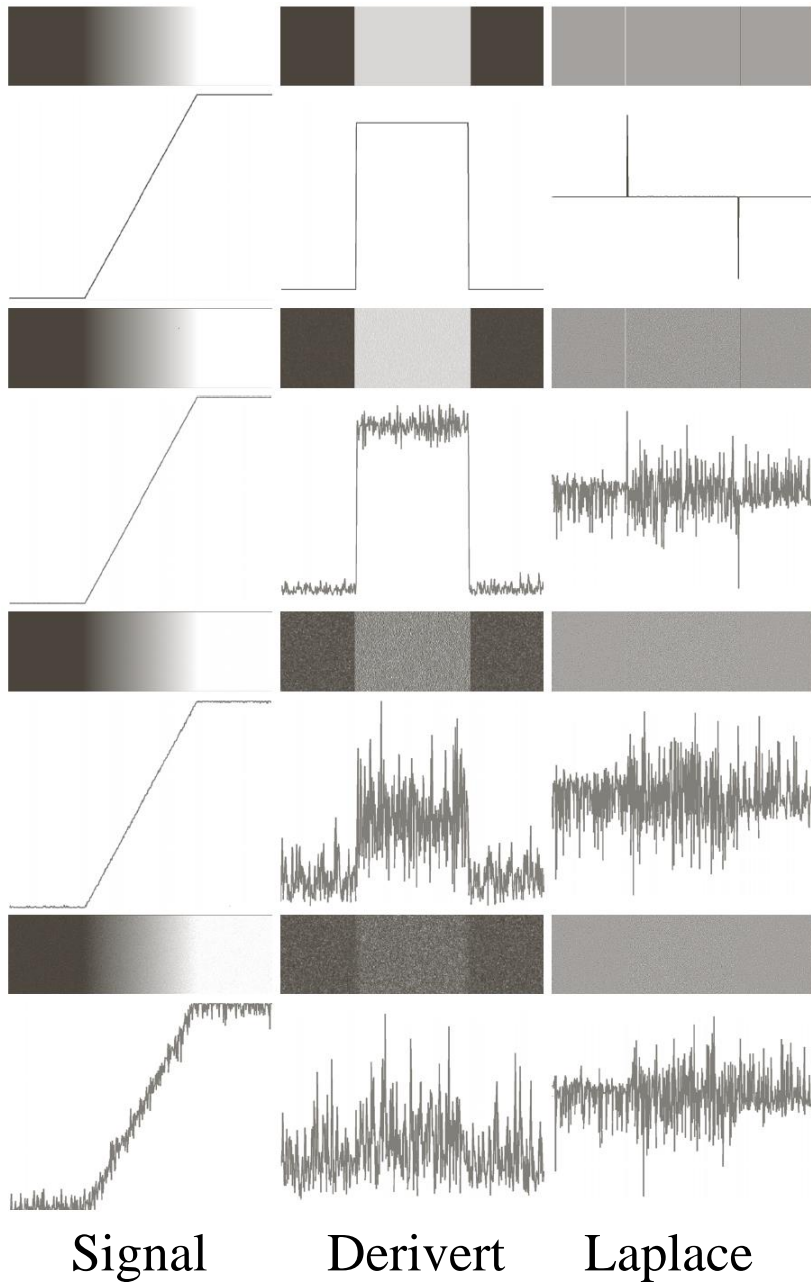


FIGURE 10.11 First column: Images and intensity profiles of a ramp edge corrupted by random Gaussian noise of zero mean and standard deviations of 0.0, 0.1, 1.0, and 10.0 intensity levels, respectively. Second column: First-derivative images and intensity profiles. Third column: Second-derivative images and intensity profiles.

Signal Derivert Laplace

To måter å lage LoG-operatorer

- Ofte lages og implementeres en LoG-operator som konvolusjonen av en Laplace-operator og et Gauss-filter.
- Ofte defineres en **LoG-operator** som en **sampling av LoG-funksjonen**, som er resultatet av å anvende Laplace-operatoren på Gauss-funksjonen i det **kontinuerlige domenet**.
- Disse fremgangsmåtene gir generelt ikke *helt* like filtre, men begge resulterer i filtre vi kaller LoG-operatorer.

Utleddning av LoG-funksjonen

2D - Gauss - funksjon :

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Deriverer mhp. x :

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{x}{2\pi\sigma^4} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Deriverer mhp. y :

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{y}{2\pi\sigma^4} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Andrederivert mhp. x :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi\sigma^4} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Andrederivert mhp. y :

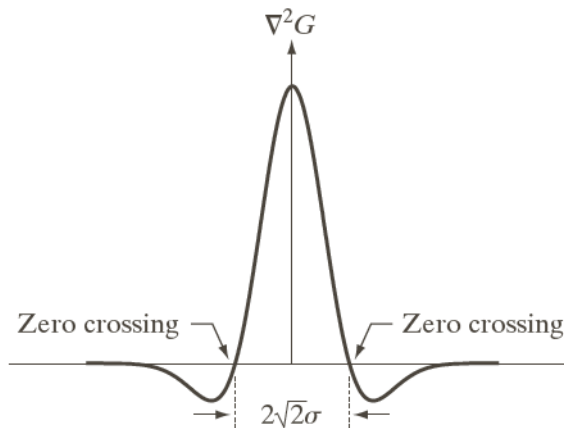
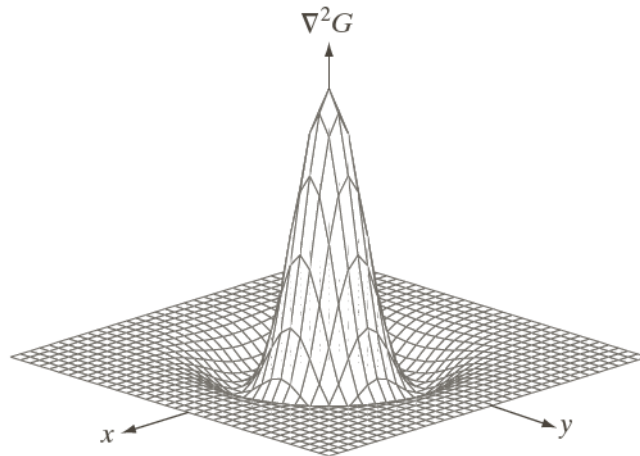
$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = -\frac{1}{2\pi\sigma^4} \left(1 - \frac{y^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

Laplaceer summen av disse :

$$-\nabla^2 G = \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left(2 - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}$$

LoG-funksjonen

- Kalles noen ganger «Mexican hat»-operatoren.



a b
c d

FIGURE 10.21

(a) Three-dimensional plot of the *negative* of the LoG. (b) Negative of the LoG displayed as an image. (c) Cross section of (a) showing zero crossings. (d) 5×5 mask approximation to the shape in (a). The negative of this mask would be used in practice.

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |
| 0 | -1 | -2 | -1 | 0 |
| -1 | -2 | 16 | -2 | -1 |
| 0 | -1 | -2 | -1 | 0 |
| 0 | 0 | -1 | 0 | 0 |

G & W definerer $\nabla^2 G$ som LoG-funksjonen, men vi definerer den som $-\nabla^2 G$

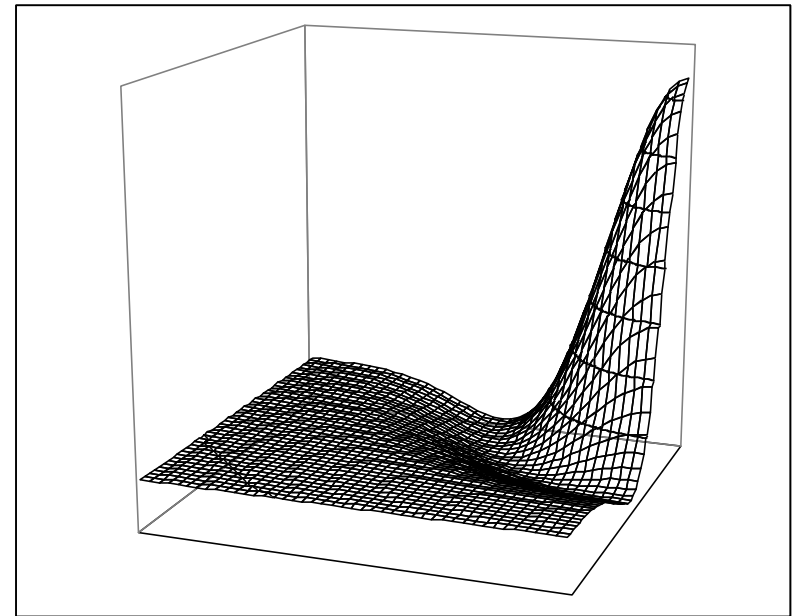
LoG-operator fra LoG-funksjonen

- Får en LoG-operator ved å sample (en variant av) LoG-funksjonen for heltallige x og y .

$$\longrightarrow -\nabla^2 G = \frac{1}{2\pi\sigma^4} \left(2 - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}}$$

- Vi bryr oss denne gangen ikke om implementasjonsdetaljene; justering slik at vektene summerer seg til 0 og eventuell heltallstilnærming av vektene.

- σ er standard-avviket til Gauss-en og er en parameter.
- I de fleste tilfeller er størrelsen av operatoren $\approx 3w \approx 8.5\sigma$
 - LoG-funksjonen omtrent 0 utenfor dette området.
 - Den positive toppen til LoG-funksjonen kalles *kjernen* og $w = 2\sqrt{2}\sigma$ er bredden av denne.

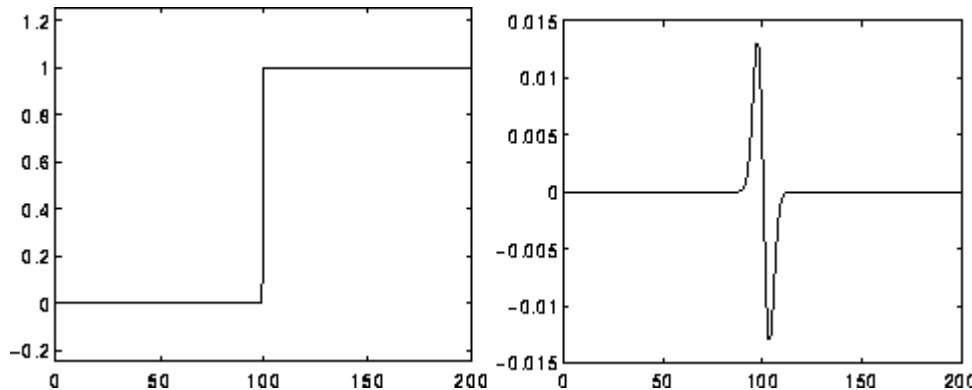


Et kvadrant av LoG-funksjonen

Bruk av LoG-operatorer

- Laplace-operator detekterer kanter, men er følsomme for støy.
- Ofte må man lavpassfiltrere før Laplace-filtrering.
- En LoG-operator gjør begge disse operasjonene i ett.
- Fungerer ellers som en Laplace-operator:
 - I homogene områder vil en LoG-operator gi respons 0.
 - Den vil ha positiv respons på den ene siden av kanten, er ideelt sett 0 i kantskillet, og har negativ respons på den andre siden.
 - **Nullgjennomganger angir kanter.**

Intensitetsprofil
av en steg-kant

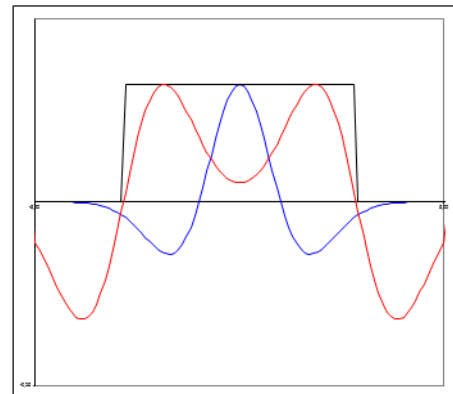
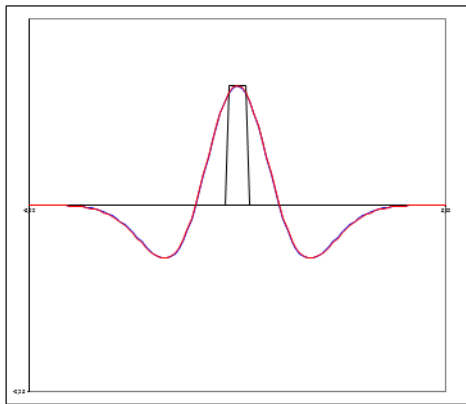


LoG-filtreringen
av profilen
NB: Filtreringen
er utført med den
negerte av en
LoG-operator.

- PS: LoG-operatorer med varierende σ fungerer også godt som «blob»-detektorer.

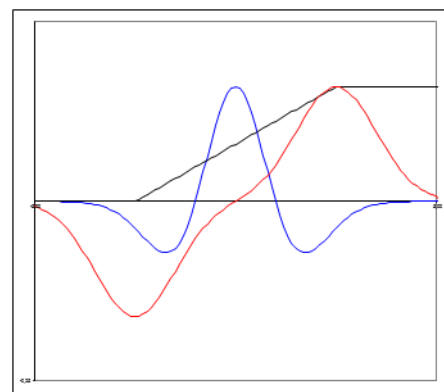
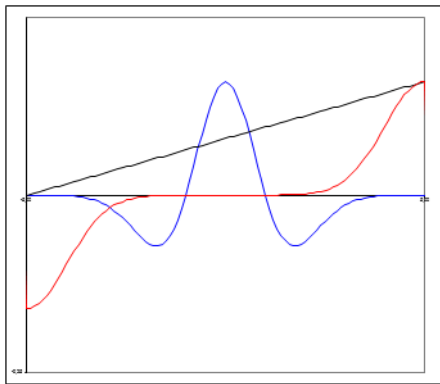
Kantdeteksjon ved LoG-nullgjennomganger

- Tommelfinger-regel for deteksjon av strukturer:
LoG-kjernen må være smalere enn strukturen.
 - Hvis strukturen er mindre enn halvparten av LoG-kjernen
=> Nullgjennomgangene er utenfor kantskillene
 - Hvis strukturen er større enn halvparten av LoG-filteret
=> Nullgjennomgangene er nøyaktig lik kantskillene
 - Et sted imellom: Avhenger av diskretiseringen og tilnærmingen av LoG-filteret.



Kantdeteksjon ved LoG-nullgjennomganger

- Tommelfinger-regel for deteksjon av ramper:
LoG-filteret må være større enn rampen.
 - Rampen er bredere enn LoG-filteret => Ingen nullgjennomgang.
 - Ellers: Nullgjennomgang midt på rampen (fornuftig resultat!).
 - P.g.a. støy må LoG-filteret være betydelig større enn rampen.
- => **Velg kjerne- og filterstørrelsen med omhu!**
 - Angis først og fremst av standardavviket til Gauss-funksjonen, som gir bredden av LoG-kjernen og antyder størrelsen av LoG-filteret.



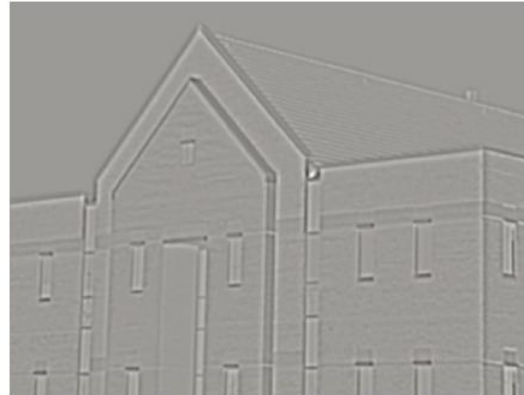
Eksempel: LoG-kantdeteksjon

- **Oppgave:** Finn fremtredende kanter.

Inn-bilde



LoG-filtrering



| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

FIGURE 10.22

(a) Original image of size 834×1114 pixels, with intensity values scaled to the range $[0, 1]$. (b) Results of Steps 1 and 2 of the Marr-Hildreth algorithm using $\sigma = 4$ and $n = 25$. (c) Zero crossings of (b) using a threshold of 0 (note the closed-loop edges). (d) Zero crossings found using a threshold equal to 4% of the maximum value of the image in (b). Note the thin edges.



Alle nullgjennomganger



De med større diff. enn T

Robust kantdeteksjon

Vanligvis tre steg i robust kantdetektor:

- 1. Støy-reduksjon:** Forsøker å fjerne så mye støy som mulig uten å glatte ut kantene for mye.
 - Lavpassfiltrering.
- 2. Kant-filtrering:** Finner kantene.
 - Høypassfiltrering; anvender f.eks. gradient-operatorer.
- 3. Kant-lokalisering:** Etterbehandler resultatet fra kant-filtreringen for å finne eksakte kantposisjoner.
 - Kantresponsen skal helst være én piksel tykk og være lokalisert der kanten faktisk er i inn-bildet.

Hva kjennetegner en god kantdetektor?

- Finner **alle** og **bare** de relevante kantene.
- Posisjonen til detektert kant samsvarer med der kanten faktisk finnes i inn-bildet.
- En kant gir én enkelt respons.
- Robust for støy.
 - Trade-off / kompromiss mellom støy-robusthet og kant-lokalisering.

Ideen til Canny

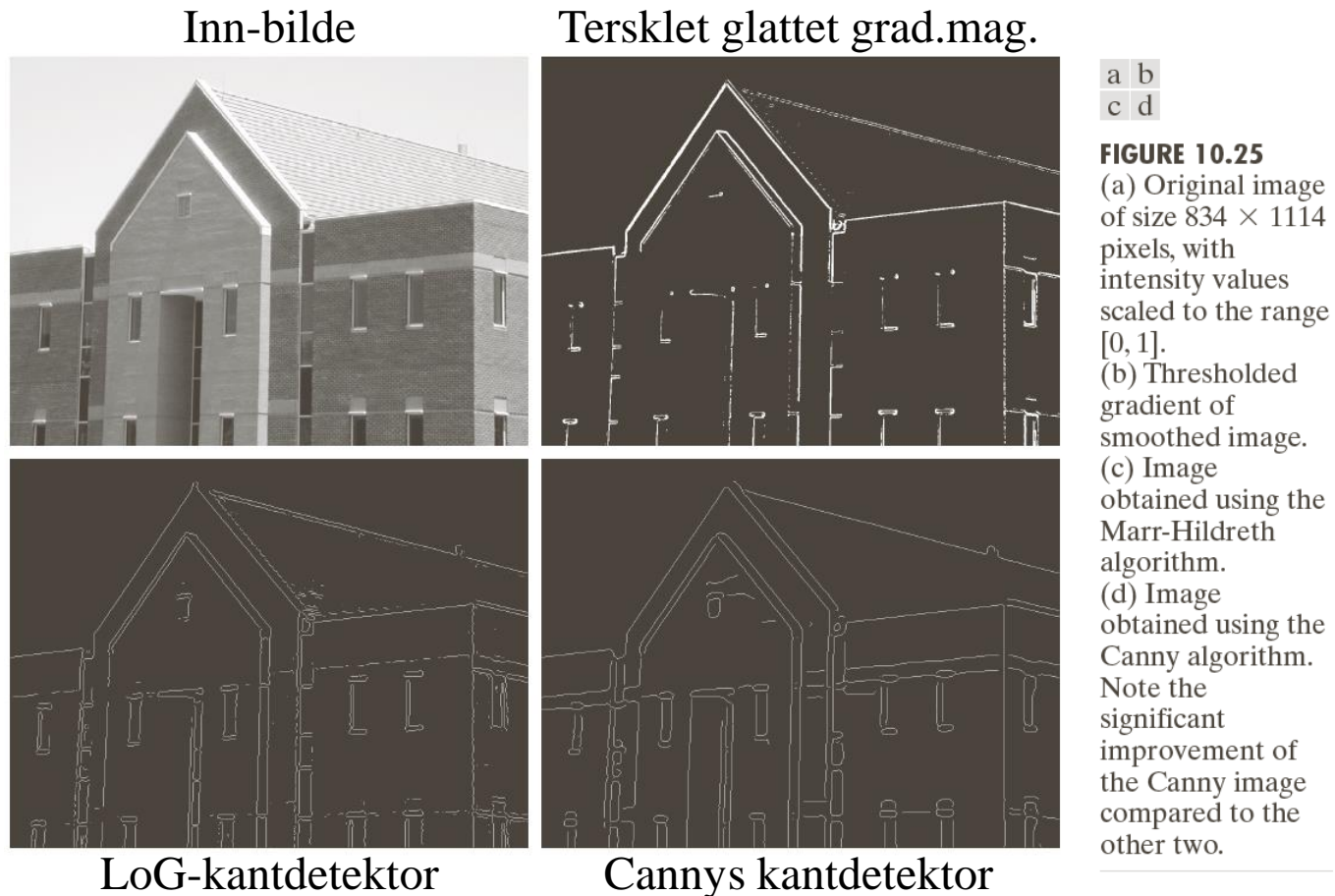
- Lag en kantdetektor som er optimal i forhold til følgende tre kriterier:
 - Best mulig deteksjon (alle kanter og bare kanter)
 - God kant-lokalisering
 - Én enkelt respons
- Optimer ved bruk av et bilde med støy.
- Resultat: Følgende enkle algoritme er nesten optimal:

Cannys algoritme

1. Lavpassfiltrér med 2D Gauss-filter (med gitt σ).
2. Finn gradient-magnituden og gradient-retningen.
3. Tynning av gradient-magnitudo ortogonalt på kant.
 - F.eks.: Hvis en piksel i gradient-magnitudo-bildet har en 8-nabo i eller mot gradient-retningen med høyere verdi, så settes pikselverdien til 0.
4. Hysterese-terskling (to terskler, T_h og T_l):
 - a. Merk alle piksler der $g(x,y) \geq T_h$
 - b. For alle piksler der $g(x,y) \in [T_l, T_h)$:
 - Hvis (4 eller 8)-nabo til en merket piksel, så merkes denne pikselen også.
 - c. Gjenta fra trinn 4.b til konvergens.

Eksempel: Kantdeteksjon

- **Oppgave:** Finn fremtredende kanter.

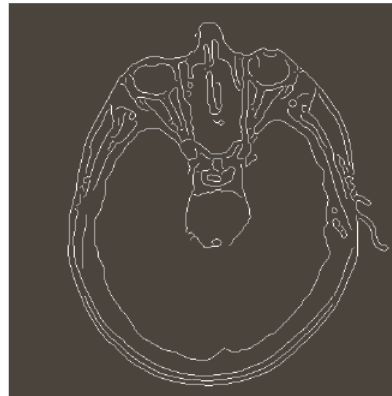
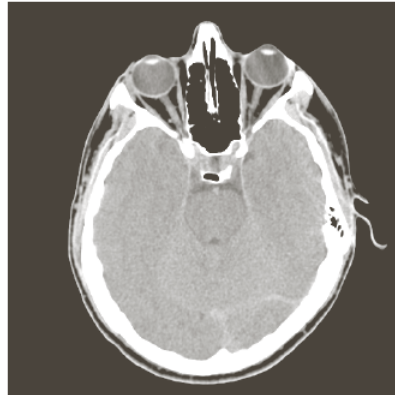


Eksempel: Kantdeteksjon

- **Oppgave:** Finn fremtredende kanter.

Inn-bilde

Tersklet glattet grad.mag.



LoG-kantdetektor

Cannys kantdetektor

Oppsummering

- Vi har utledet enkle kant-deteksjonsoperatorer.
- Gradient-operatorene glatter i den ene retningen og gjør kantdeteksjon i den ortogonale retningen.
- Gradient-operatorer gir både kant-styrke og retning.
- Laplace-operatorer gir presis lokalisering av kanten, men forsterker støy.
- LoG-operatoren er en mer robust versjon av Laplace som inkluderer Gauss-glatting.
 - Kjernens og filterets størrelse må passe til oppgaven!
- Canny's kantdetektor gir et godt kompromiss mellom støyreduksjon og kantlokalisering.