

---

# IN2070 – Vår 2022 – Ukens temaer

## (Kap 3.3 i DIP)

- Kjapp repetisjon av gråtonetransformasjon
- Histogramtransformasjoner
  - Histogramutjevning
  - Histogramtilpasning/histogramspesifikasjon
  - Standardisering av histogram for billedserier
- Lokal gråtone-transformasjon

# Repetisjon av histogrammer

---

- Gråtonehistogram:

$h(i)$  = antall piksler i bildet med pikselverdi  $i$ ,  
og følgelig er  $\sum_{i=0}^{G-1} h(i) = n \times m$

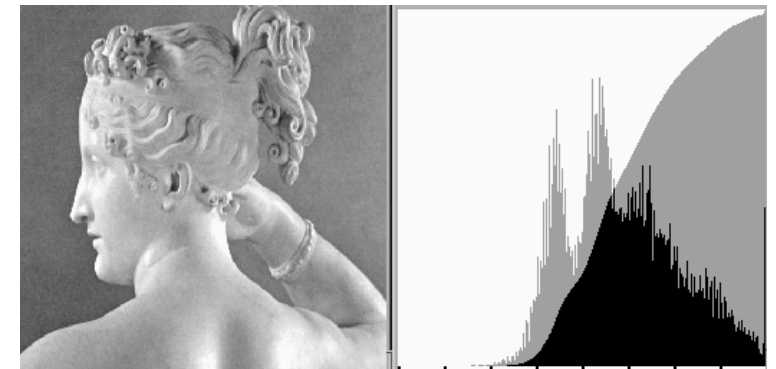
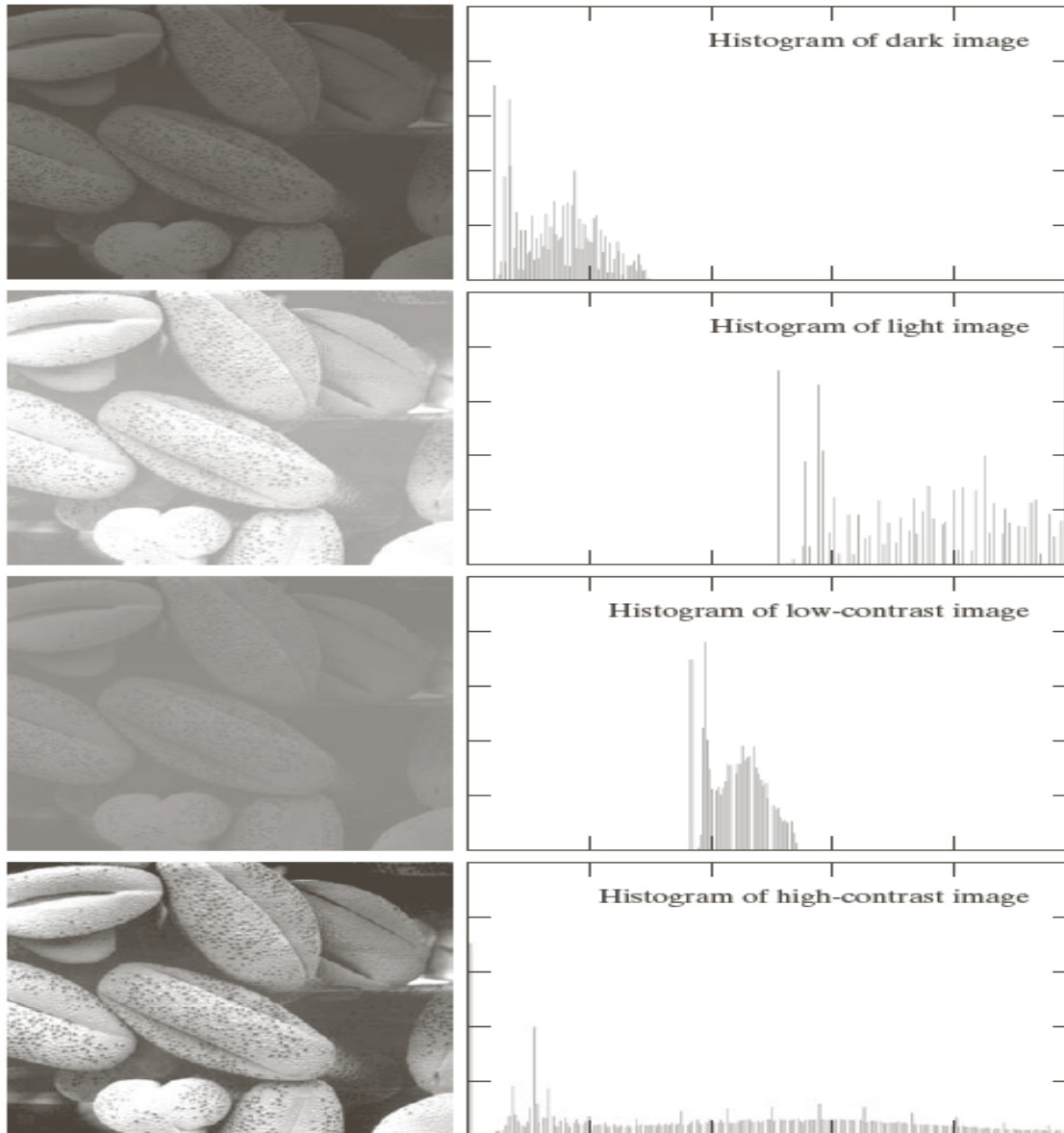
- Det normaliserte histogrammet:

$$p(i) = \frac{h(i)}{n \times m}, \quad \sum_{i=0}^{G-1} p(i) = 1$$

- Det normaliserte kumulative histogrammet:

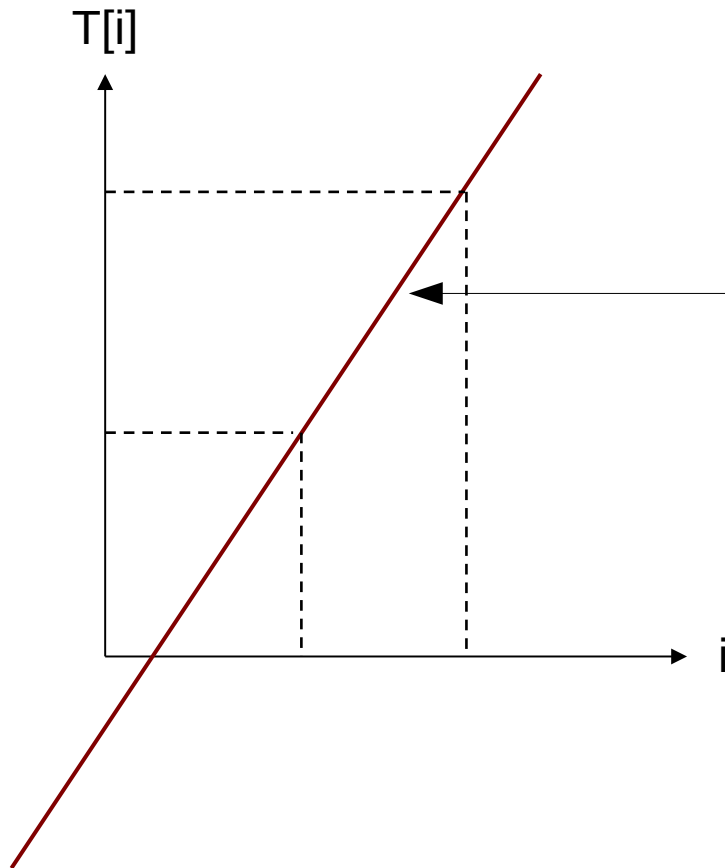
$$c(j) = \sum_{i=0}^j p(i)$$

# Repetisjon av histogrammer II



# Repetisjon av gråtonetransform

---



Forrige uke:  $T[i]$  gitt som en parametrisk funksjon.

Feks en linje i planet:  
 $T[i] = ai + b$

**I dag:** Gitt et bilde,  **finn  $T[i]$  ved å spesifisere ønsket histogram.**

# Histogramutjevning

## *(histogram equalization)*

---

- Mål: *Maksimere kontrasten* og samtidig beholde *gråtonerikheten*

Gjøre histogrammet uniformt (flatt)



Kumulative histogrammet en rett linje

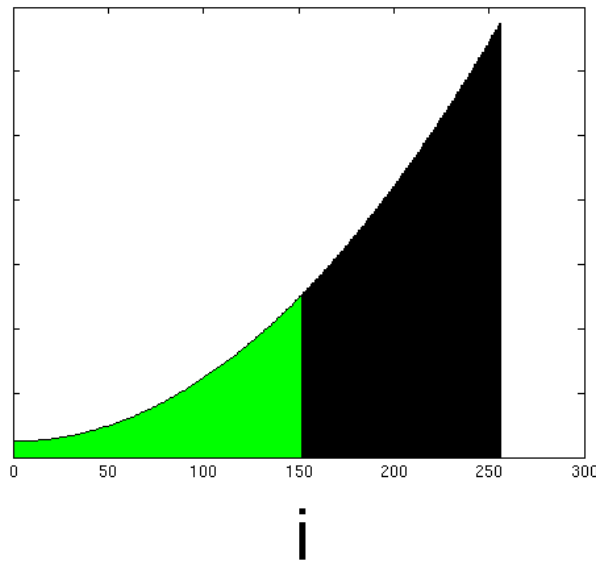
- Middel: Global gråtonetransform;  $T[i]$ 
  - Altså flytte på (hele) histogramsøyler
- Tilnærming ved å spre søylene mest mulig utover det støttede intensitetsintervallet

# Tommelfingerløsning

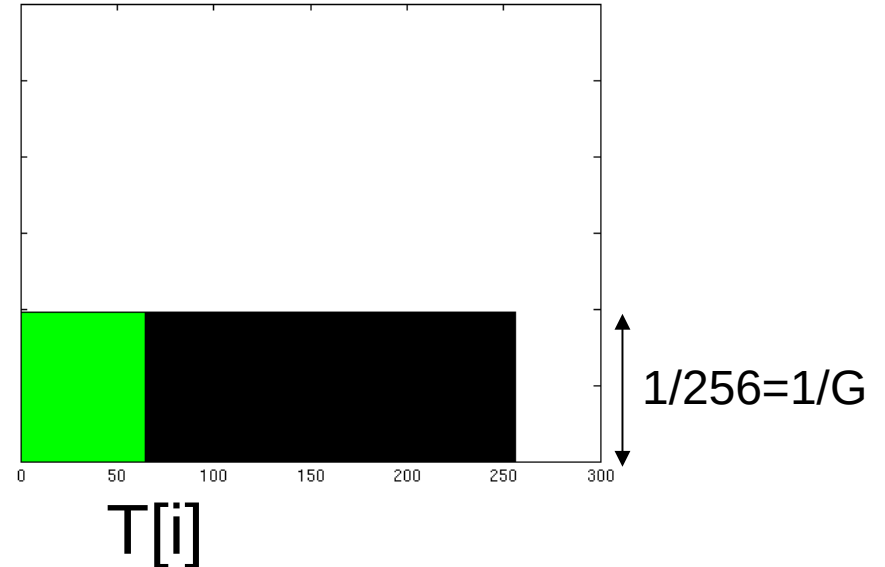
---

- Vil ha store mellomrom mellom høye histogramsøyler, og lite mellomrom der vi har lave søyler, samt ikke bytte om rekkefølgen
  - en transform med høyt stigningstall hvor det er mange piksler, og lavt stigningstall hvor det er få piksler
- Det **kumulative histogrammet** har akkurat disse egenskapene
- Histogramutjevnings-transformen,  $T[i]$ , er (faktisk) gitt ved det skalerte kumulative histogrammet til innbildet
  - Bittelitt mer håndfast utledning på neste side
  - En (riktig så) formell utledning i læreboka

# Tommelfingerløsning++ I/II



$T$



$$\int_0^i p(x) dx$$

$=$   
 $\Downarrow$

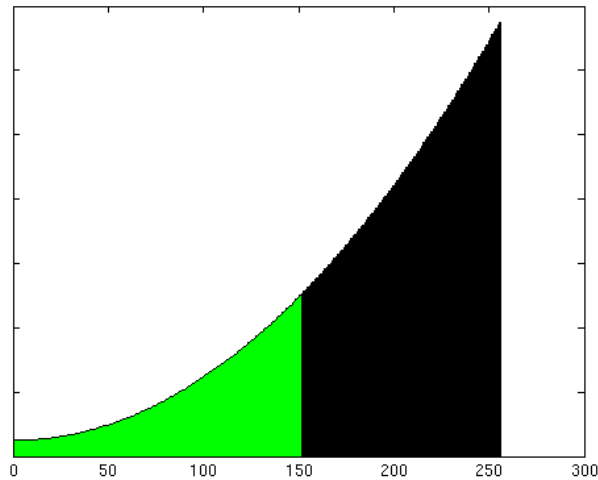
$$T[i] \frac{1}{G}$$

$$T[i] = G \int_0^i p(x) dx$$

Vi får tilnærmet det samme om vi bytter integrasjonen med en summasjon  
→ diskret histogramutjevning

# Tommelfingerløsning++ II/II

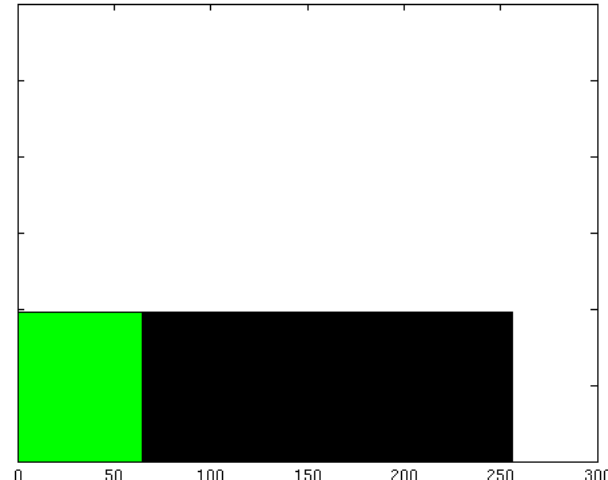
p



i

$T$

q



$1/256=1/G$

$T[i]$

$c_p(i)$

Normalisert kumulativt histogram

$\approx$   
 $\Downarrow$

$$T[i] \approx Gc_p(i)$$

$$c_q(T[i]) = T[i] \frac{1}{G}$$

Normalisert kumulativt histogram

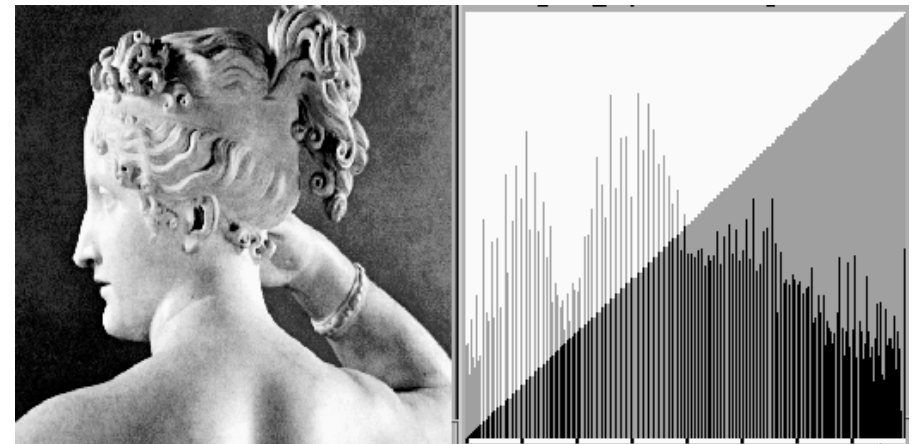
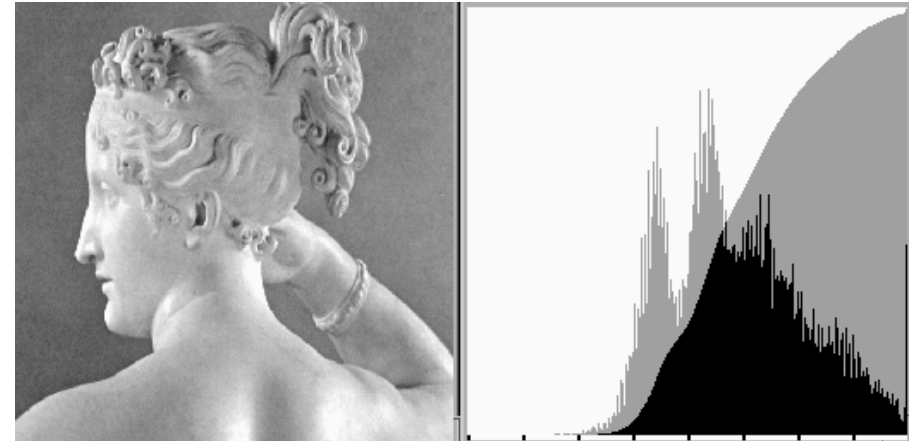


# Pseudokode for histogramutjevning

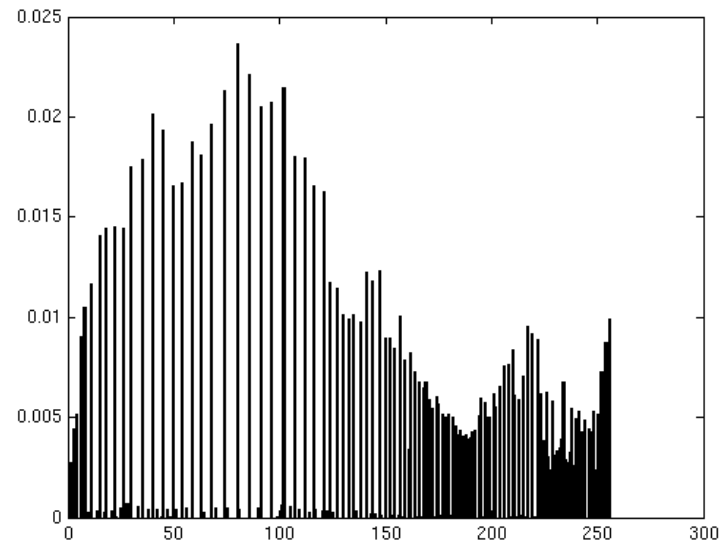
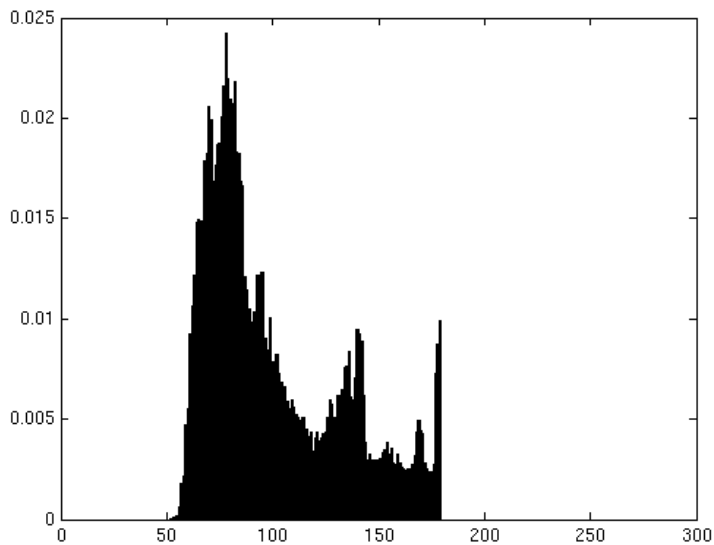
- For et  $n \times m$  bilde med  $G$  gråtoner:
  - Lag array  $h$ ,  $p$ ,  $c$  og  $T$  av lengde  $G$
- Finn bildets normaliserte histogram
  - Gå igjennom bildet piksel for piksel. Hvis piksel har intensitet  $i$ , la  $h[i]=h[i]+1$
  - Deretter skalér,  $p[i] = h[i]/(n*m)$ ,  $i=0,1,\dots,G-1$
- Lag det (normaliserte) kumulative histogrammet  $c$ 
  - $c[0] = p[0]$
  - $c[i] = c[i-1]+p[i]$ ,  $i=1,2,\dots,G-1$
- Sett inn verdier i transformarray  $T$   
 $T[i] = \text{round}( (G-1)*c[i] )$ ,  $i=0,1,\dots,G-1$ 
  - ← Alternativt  $T[i] = \text{ceil}( G*c[i] - 1 )$
- Gå igjennom bildet piksel for piksel,  
Hvis pikselen har intensitet  $i$ , sett intensitet  $i$  utbildet til  
 $s=T[i]$

# Histogramutjevning – eksempel I

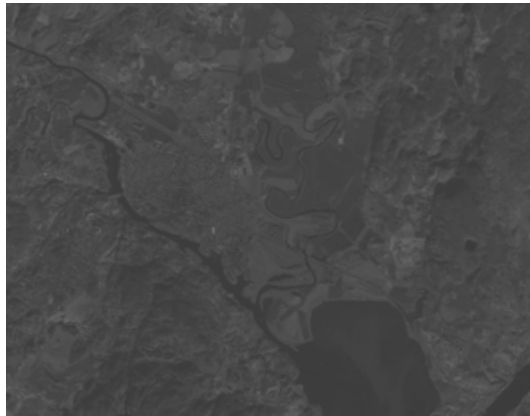
- Det resulterende histogrammet ser ikke flatt ut, men det kumulative histogrammet er tilnærmet en rett linje
- Husk at søylene ikke kan splittes for å tilfredstille et flatt histogram ved ren gråtonetransform



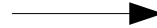
# Histogramutjevning – eksempel II



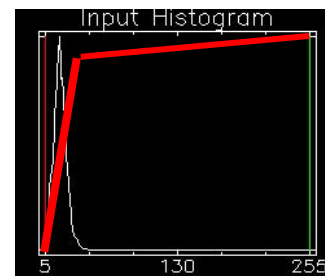
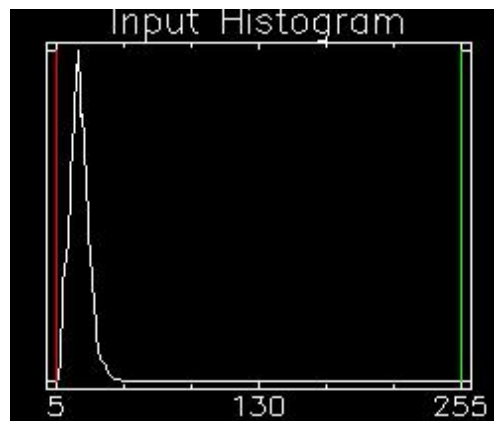
# Histogramutjevning – eksempel III



Histogram-  
utjevning



Stykkevis  
lineærtransform

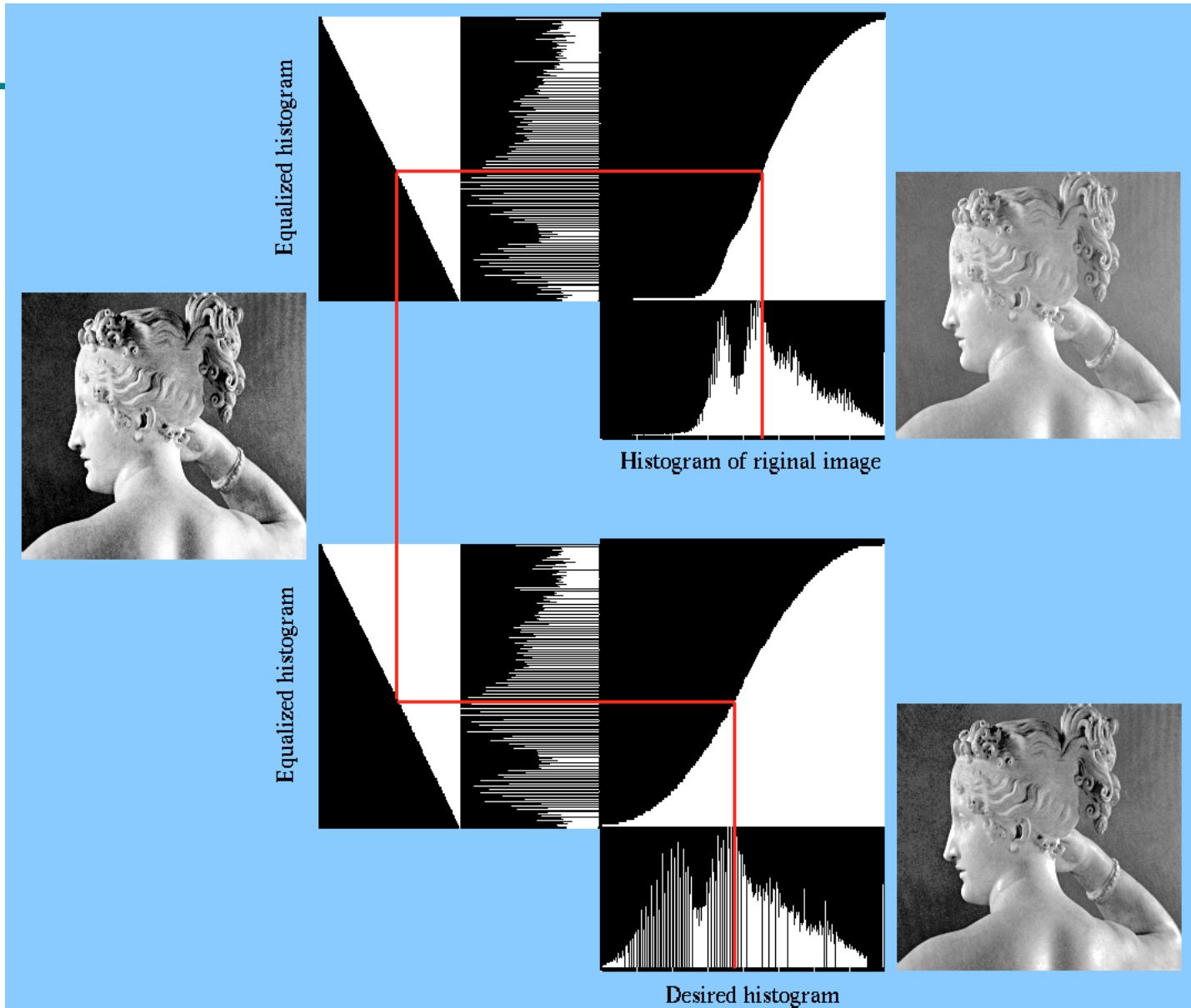


Histogramutjevning gir ikke nødvendigvis det beste *visuelle* resultatet!

# Histogramtilpasning I/II

---

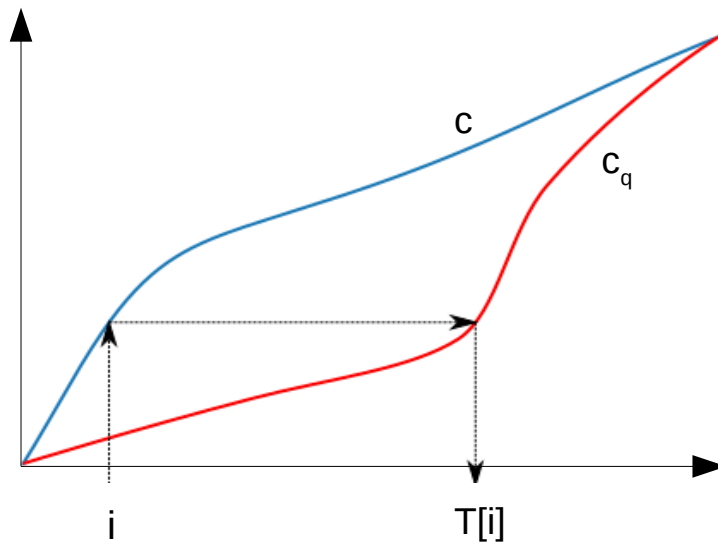
- Histogramutjevning gir (tilnærmet) flatt histogram
- Kan spesifisere annen form på resultathistogrammet:
  1. Gjør histogramutjevning på innbildet, finn  $s=T(i)$
  2. Spesifiser ønsket nytt histogram  $g(z)$
  3. Finn den transformen  $T_g$  som histogramutjevner  $g(z)$  og inverstransformen  $T_g^{-1}$
  4. Inverstransformer det histogramutjevnete bildet fra punkt 1 ved  $z=T_g^{-1}(s)$



(Fra [http://fourier.eng.hmc.edu/e161/lectures/contrast\\_transform/node3.html](http://fourier.eng.hmc.edu/e161/lectures/contrast_transform/node3.html))

# Histogramtilpasning II/II

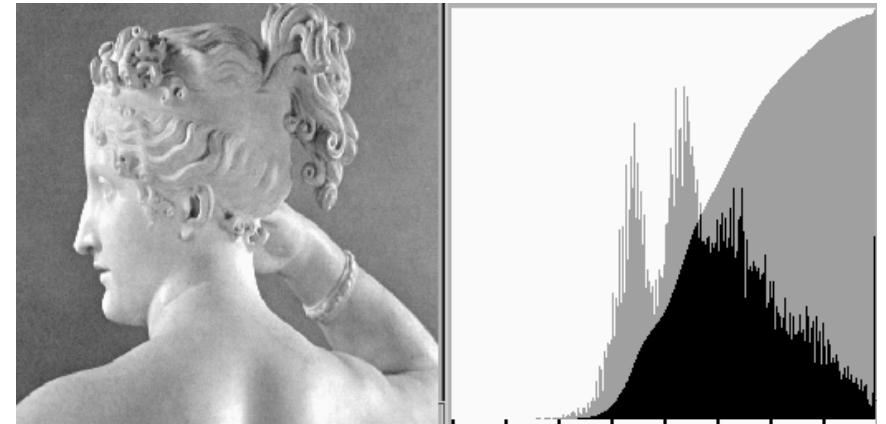
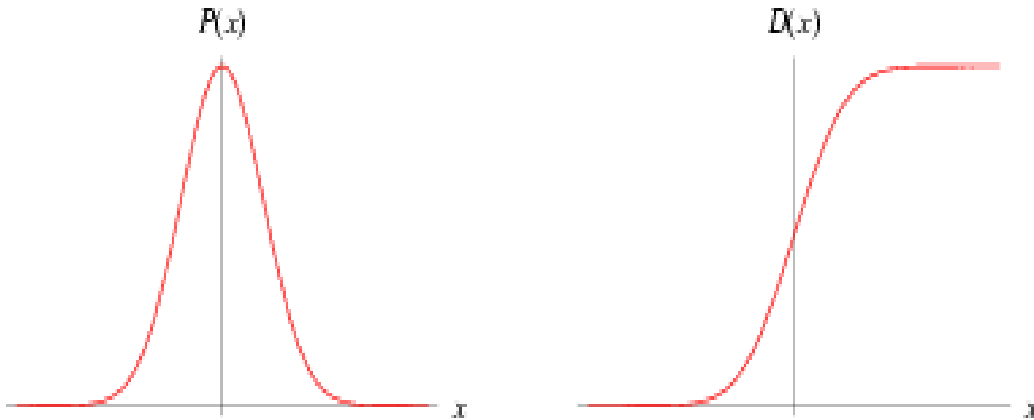
- Alternativ tankegang: Flytt søylene på det *kumulative* histogrammet slik at vi får et nytt *kumulativt* histogram som ligner på det ønskede
- For hver  $i$  har vi en søylehøyde  $c(i)$  ..
- .. finn så  $T[i]$  slik at søylehøyden på det ønskede kumulative histogrammet,  $c_q$ , blir tilnærmet likt  $c(i)$



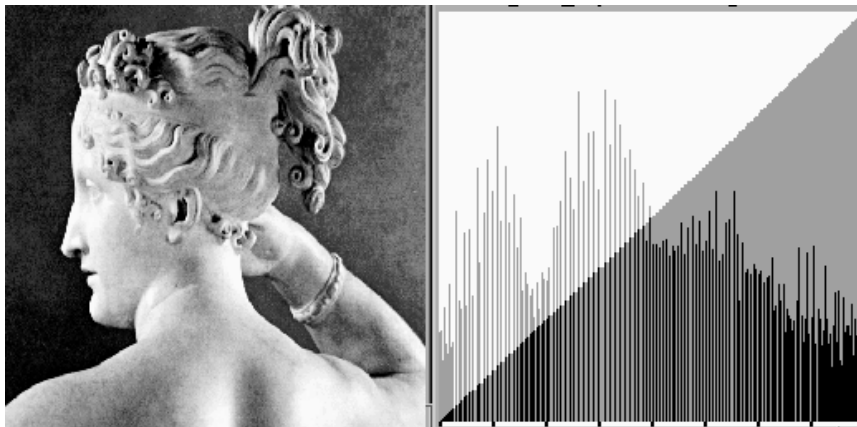
$$c(i) \approx c_q(T[i])$$

Finn beste  $T[i]$  for hver  $i$

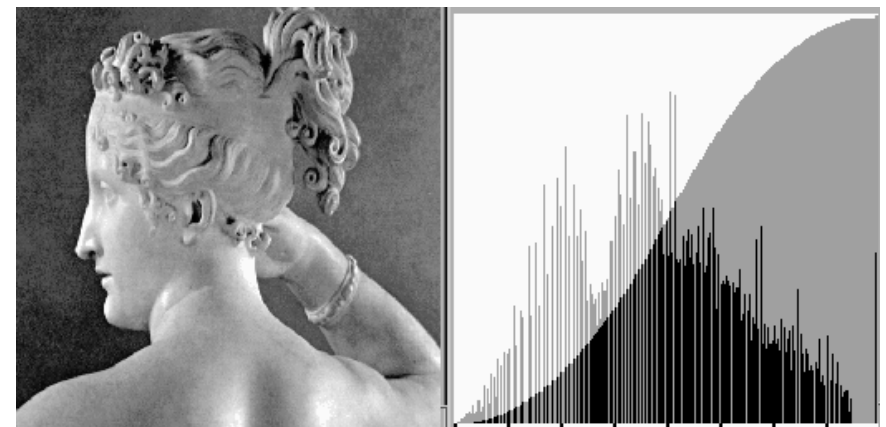
# Tilpasning til Gauss-profil



Originalbilde



Histogram-utjevnet



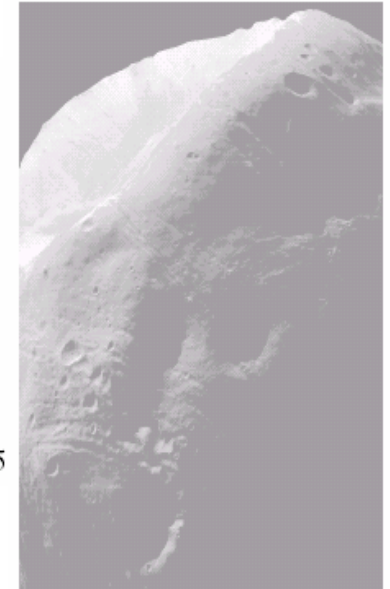
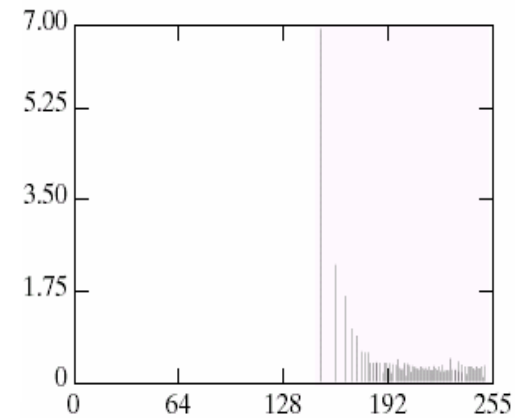
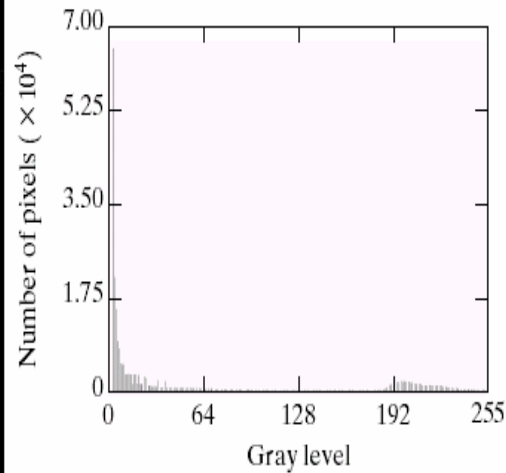
Tilpasset Gauss-form



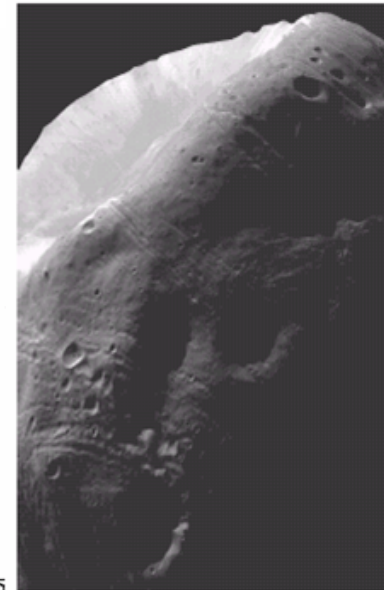
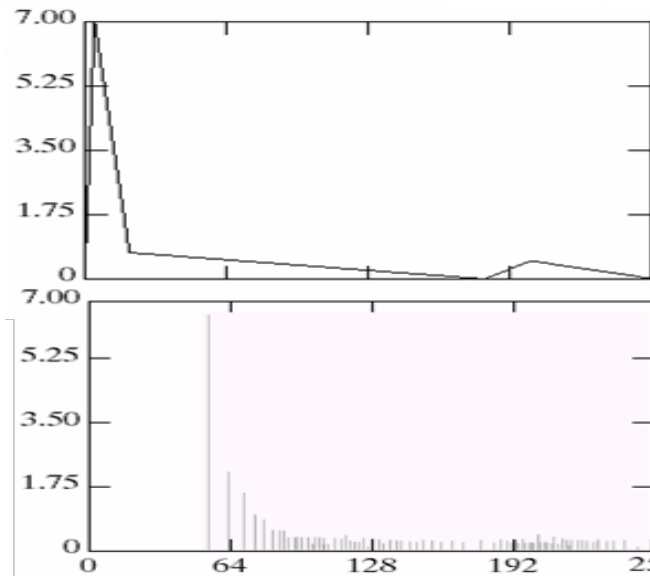
# Tilpasning til vilkårlig kurve



Histogramutjevning



Tilpass til denne kurven

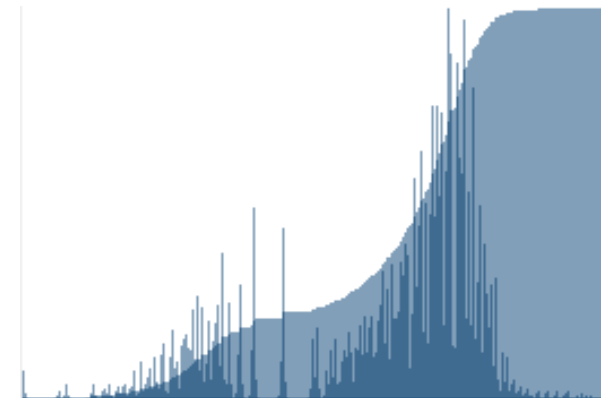
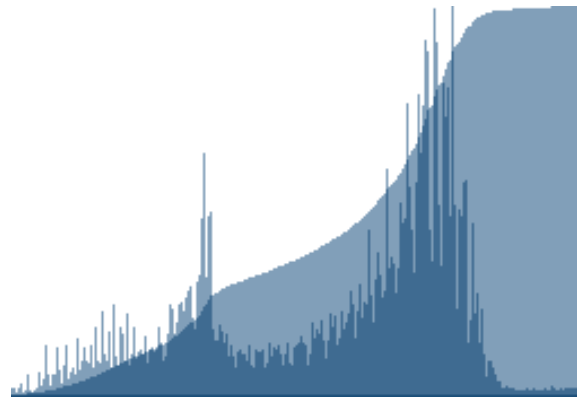
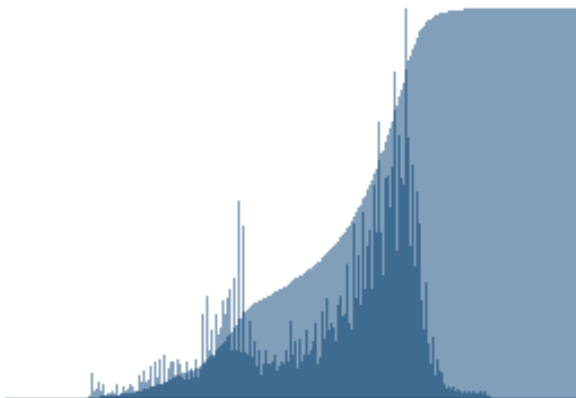


(Bilder hentet fra DIP/NASA)

# ”Histogram matching”

---

- Histogramtilpasning hvor det ene bildets histogram benyttes som ønsket form



# Standardisering av histogram

---

- Hensikt:
  - Sørge for at alle bildene i en serie har like histogrammer
    - Antar altså at fordelingene av gråtonene bør være nogenlunde lik over bildene
- Metoder:
  - Histogramutjevning
  - Histogramspesifikasjon (f.eks. til oppgitt Gauss-profil eller referansebilde)
- Hvorfor? Fjerne effekten av
  - Døgnvariasjon i belysning
  - Aldringseffekter i lamper og detektorer
  - Akkumulering av støv på linser etc.
- Hvor:
  - Produkt-inspeksjon i industri
  - Ansiktsgjenkjenning
  - Medisinsk avbildning
  - ...

Jfr. forrige uke, da vi standardiserte bilder ved å benytte en lineær strekking til å gi bildene samme middelværdi og varians

# Når bør du IKKE gjøre dette?

---

- Ikke standardisere histogrammet hvis:
  - Det kan være "reelle" variasjoner i middelerverdi og varians til bildene i en bildeserie
  - «Formen» på histogrammet kan ha verdi ved videre analyse
- Hva gjør du?
  - Behold originalene, og jobb på kopier (selfølgelig..)
  - Gjør lineære gråtonetransformasjoner på bildene
    - Dette vil bevare strukturene i histogrammet, selv om  $(\mu, \sigma)$  endres
- Eksempel:
  - Mikroskopering av kreft-celler (se neste side)

(Fra B. Nielsen et.al)

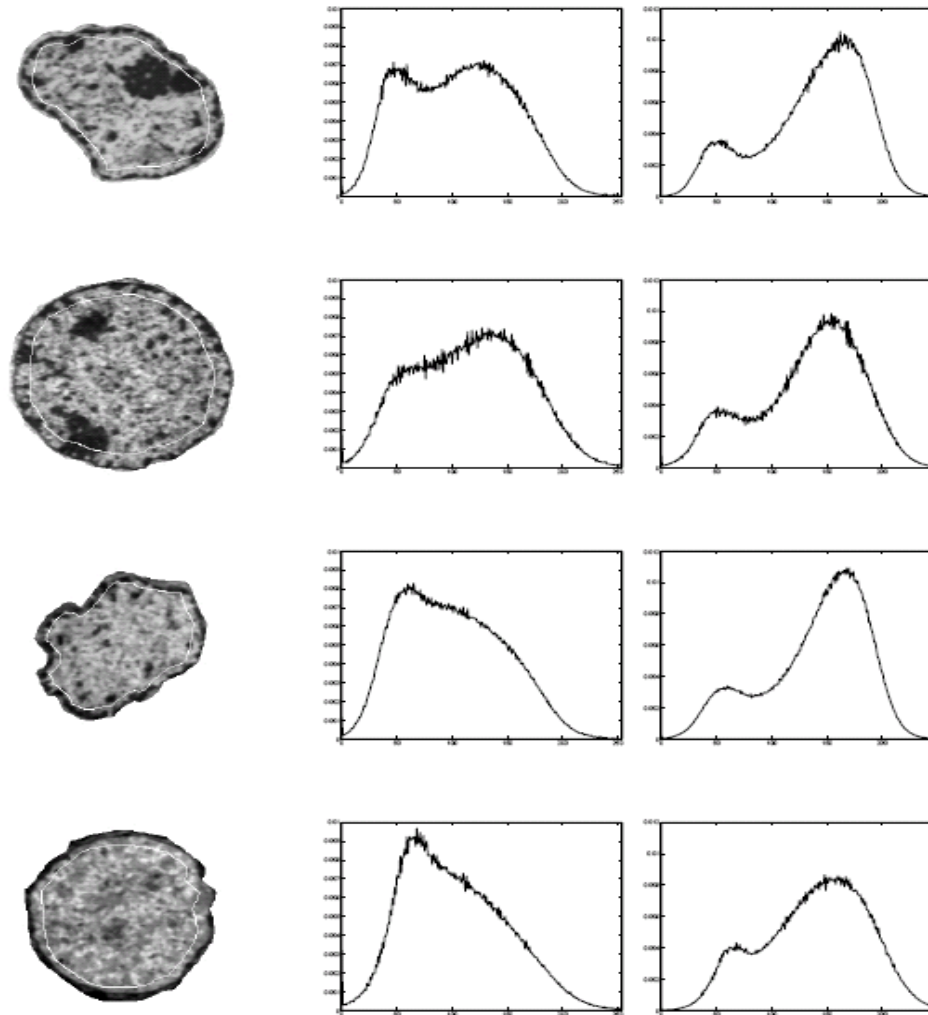
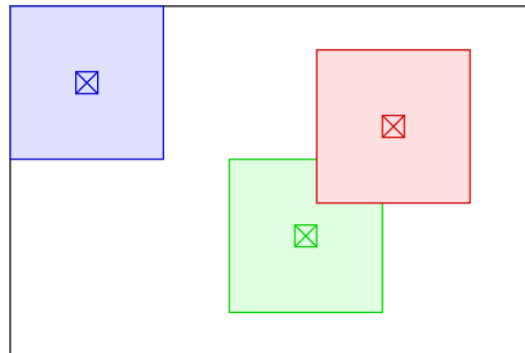


Figure 1: **First column:** Examples of liver cell nuclei from normal, regenerating, noduli and tumor samples. The borders between the 30% peripheral and 70% central part are outlined as a thin white line. **Second column:** The mean gray level histograms from all cell nuclei within each of the four classes, based on the 30% peripheral part of nuclei. **Third column:** The mean gray level histograms from all cell nuclei within each of the four classes, based on the central 70% of the nuclei.

# Lokal gråtonetransform (GTT) I/III

---

- Vil standardisere den **lokale** kontrasten
  - Vil ha samme “lyshet” og kontrast over hele bildet
- Transformasjonene vi har sett på kan beregnes ut fra pikselverdiene i en **lokal omegn** (typisk et kvadratisk vindu) omkring punktet  $(x,y)$ 
  - Kun pikselen  $(x,y)$  bestemmes av transformen basert på dette vinduets piksler
  - Altså egen transform for hver piksel i bildet (adaptiv)



# Lokal GTT III/III

---

- Utfør lokal GTT som prøver å oppnå samme kontrast over hele bildet
  - Histogramspesifikasjon
    - Beregn det kumulative histogrammet i et *vindu* sentrert om  $(x,y)$
    - Endre *senterpikselen* ved den resulterende transformen
  - Lineær standardisering av  $\sigma$ 
    - Beregn  $\mu_{xy}$  og  $\sigma_{xy}$  i et vindu sentrert om  $(x,y)$
    - Transformer  $f(x,y)$  til  $g(x,y)$  med en lineær transform som gir nytt standardavvik  $\sigma_0$  innenfor vinduet

$$g_1(x, y) = \mu_{xy} + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy}}$$

(Husk at vi kom frem til dette uttrykket forrige uke)

# Lokal GTT – Eksempel I

Any eigenvector,  $x$ , of  $A$  where  $Rx \neq 0$ , has an eigenvalue that goes to  $\infty$  as  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' Ax = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' \Sigma x + \lambda \lambda' R x = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' A^{-1} x = 0$$

Thus, as  $\lambda \rightarrow \infty$ , the only eigenvectors of  $A^{-1}$  with nonzero eigenvalues are the  $k$  eigenvectors included in (and spanning)  $span(V)$ .

Now let  $\Omega = VV'$ . The eigenvectors in  $span(V)$  are retained when multiplied by  $\Omega$ , i.e.,  $x \in span(V) \Rightarrow \Omega x = x$ , while  $x \in null(V) \Rightarrow \Omega x = 0$ . Letting the columns of  $S$  contain the eigenvectors of  $A$  as  $\lambda \rightarrow \infty$ , we see that  $\Omega S$  has  $k$  nonzero columns corresponding to the  $k$  eigenvectors in  $span(V)$ . We can thus remove the eigenvectors in  $null(V)$  by multiplying  $\Omega$  on both sides of  $A$ :

$$(\Omega S) D (S' \Omega) = \Omega (S D S') \Omega = \Omega A \Omega$$

where  $D$  is a diagonal matrix containing the eigenvalues of  $A$ . Furthermore, the eigenvectors in  $span(V)$  are independent of  $\lambda$ :

$$\Omega A \Omega = \Omega \Sigma \Omega + \lambda \widehat{\Omega R \Omega} = \Omega \Sigma \Omega$$

Thus, the eigenvectors and inverted eigenvalues of  $\Omega \Sigma \Omega$  are the same as the nonzero eigenvectors and eigenvalues in  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\Sigma + \lambda R)^{-1}$ , which concludes the proof.

### A.3 The $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$ ratio in QDA

We know, from Appendices A.1 and A.2, that our proposition is correct for the second term in (IV-1), the Mahalanobis distance. In LDA this is all that is needed to show equality of the classifiers, but in QDA we must also show that the ratio  $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$  for any two classes  $i$  and  $j$ , or the differences in their log values, becomes equal in the regularized and the feature-reduced case. That is, letting  $\Sigma_{ik}$  denote class  $i$ 's  $k \times k$  sample covariance matrix, we must show that (choosing classes 1 and 2 for notational simplicity)

$$\frac{|\Sigma_1 + \lambda R|}{|\Sigma_2 + \lambda R|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{|\Sigma_{k1}|}{|\Sigma_{k2}|}$$

Original

Any eigenvector,  $x$ , of  $A$  where  $Rx \neq 0$ , has an eigenvalue that goes to  $\infty$  as  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' Ax = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' \Sigma x + \lambda \lambda' R x = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' A^{-1} x = 0$$

Thus, as  $\lambda \rightarrow \infty$ , the only eigenvectors of  $A^{-1}$  with nonzero eigenvalues are the  $k$  eigenvectors included in (and spanning)  $span(V)$ .

Now let  $\Omega = VV'$ . The eigenvectors in  $span(V)$  are retained when multiplied by  $\Omega$ , i.e.,  $x \in span(V) \Rightarrow \Omega x = x$ , while  $x \in null(V) \Rightarrow \Omega x = 0$ . Letting the columns of  $S$  contain the eigenvectors of  $A$  as  $\lambda \rightarrow \infty$ , we see that  $\Omega S$  has  $k$  nonzero columns corresponding to the  $k$  eigenvectors in  $span(V)$ . We can thus remove the eigenvectors in  $null(V)$  by multiplying  $\Omega$  on both sides of  $A$ :

$$(\Omega S) D (S' \Omega) = \Omega (S D S') \Omega = \Omega A \Omega$$

where  $D$  is a diagonal matrix containing the eigenvalues of  $A$ . Furthermore, the eigenvectors in  $span(V)$  are independent of  $\lambda$ :

$$\Omega A \Omega = \Omega \Sigma \Omega + \lambda \widehat{\Omega R \Omega} = \Omega \Sigma \Omega$$

Thus, the eigenvectors and inverted eigenvalues of  $\Omega \Sigma \Omega$  are the same as the nonzero eigenvectors and eigenvalues in  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\Sigma + \lambda R)^{-1}$ , which concludes the proof.

### A.3 The $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$ ratio in QDA

We know, from Appendices A.1 and A.2, that our proposition is correct for the second term in (IV-1), the Mahalanobis distance. In LDA this is all that is needed to show equality of the classifiers, but in QDA we must also show that the ratio  $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$  for any two classes  $i$  and  $j$ , or the differences in their log values, becomes equal in the regularized and the feature-reduced case. That is, letting  $\Sigma_{ik}$  denote class  $i$ 's  $k \times k$  sample covariance matrix, we must show that (choosing classes 1 and 2 for notational simplicity)

$$\frac{|\Sigma_1 + \lambda R|}{|\Sigma_2 + \lambda R|} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \frac{|\Sigma_{k1}|}{|\Sigma_{k2}|}$$

Global histogram-  
utjevning

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' Ax = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' \Sigma x + \lambda \lambda' R x = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda' A^{-1} x = 0$$

Thus, as  $\lambda \rightarrow \infty$ , the only eigenvectors of  $A^{-1}$  with nonzero eigenvalues are the  $k$  eigenvectors included in (and spanning)  $span(V)$ .

Now let  $\Omega = VV'$ . The eigenvectors in  $span(V)$  are retained when multiplied by  $\Omega$ , i.e.,  $x \in span(V) \Rightarrow \Omega x = x$ , while  $x \in null(V) \Rightarrow \Omega x = 0$ . Letting the columns of  $S$  contain the eigenvectors of  $A$  as  $\lambda \rightarrow \infty$ , we see that  $\Omega S$  has  $k$  nonzero columns corresponding to the  $k$  eigenvectors in  $span(V)$ . We can thus remove the eigenvectors in  $null(V)$  by multiplying  $\Omega$  on both sides of  $A$ :

$$(\Omega S) D (S' \Omega) = \Omega (S D S') \Omega = \Omega A \Omega$$

where  $L$  is a diagonal matrix containing the eigenvalues of  $A$ . Furthermore, the eigenvectors in  $span(V)$  are independent of  $\lambda$ :

$$\Omega A \Omega = \Omega \Sigma \Omega + \lambda \widehat{\Omega R \Omega} = \Omega \Sigma \Omega$$

Thus, the eigenvectors and inverted eigenvalues of  $\Omega \Sigma \Omega$  are the same as the nonzero eigenvectors and eigenvalues in  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\Sigma + \lambda R)^{-1}$ , which concludes the proof.

### A.3 The $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$ ratio in QDA

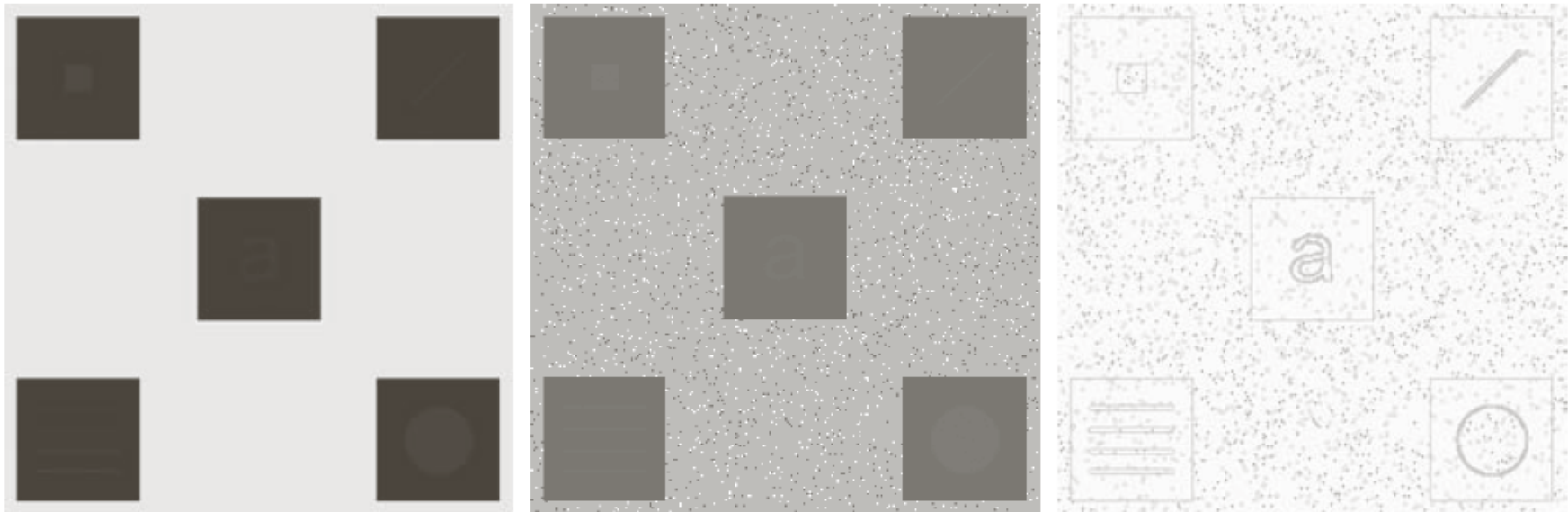
We know, from Appendices A.1 and A.2, that our proposition is correct for the second term in (IV-1), the Mahalanobis distance. In LDA this is all that is needed to show equality of the classifiers, but in QDA we must also show that the ratio  $|\Sigma_i|/|\Sigma_j|$  for any two classes  $i$  and  $j$ , or the differences in their log values, becomes equal in the regularized and the feature-reduced case. That is, letting  $\Sigma_{ik}$  denote class  $i$ 's  $k \times k$  sample covariance matrix, we must show that (choosing classes 1

Lokal endring av  
middelveerdi og kontrast



# Lokal GTT – Eksempel II

---



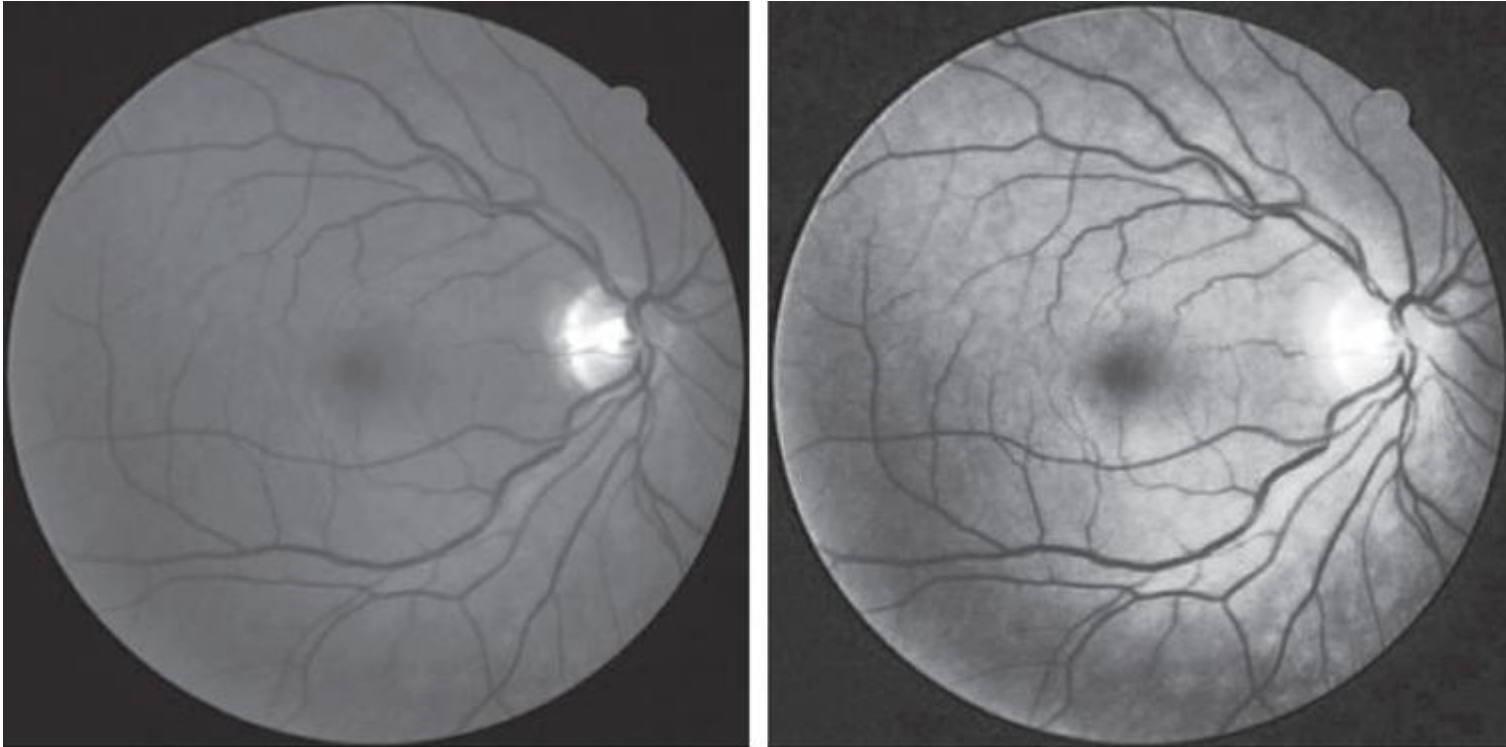
a b c

**FIGURE 3.26** (a) Original image. (b) Result of global histogram equalization. (c) Result of local histogram equalization applied to (a), using a neighborhood of size  $3 \times 3$ .

(Fra DIP, Gonzales & Woods)

# Lokal GTT – Eksempel III

---



(iospress.com / Jiang et al. 2015)

# Lokal GTT III/III

---

- Vi er ofte nødt til å begrense «endringstiljen» til de lokale kontrastendringstransformene
  - Innføre brukerstyrte parametre



Input



«Ubegrenset»  
lokal histogramutjevning

IN2070



«Ubegrenset»  
lokal lineær strekking

# Lokal GTT i praksis | lineær strekking I/II

---

- Ønsker vi en lokal GTT som også gir en ny middelvei  $\mu_0$ , så bruker vi transformen

$$g_2(x, y) = \mu_0 + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy}}$$

- Men dette vil ofte gi et "flatt" bilde
- Introduserer parameteren  $\beta$ , styrer hvor kraftig vi endrer  $\mu$ :
  - $\beta = 0 \rightarrow$  uforandret middelvei over hele bildet
  - $\beta = 1 \rightarrow$  lik middelvei over hele bildet

$$g_3(x, y) = \beta\mu_0 + (1 - \beta)\mu_{xy} + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy}}$$

# Lokal GTT i praksis | lineær strekking II/II

---

- Hva er karakteristisk for homogene områder i et bilde?

$$\sigma_{xy} = 0$$

- Her får vi problemer, fordi

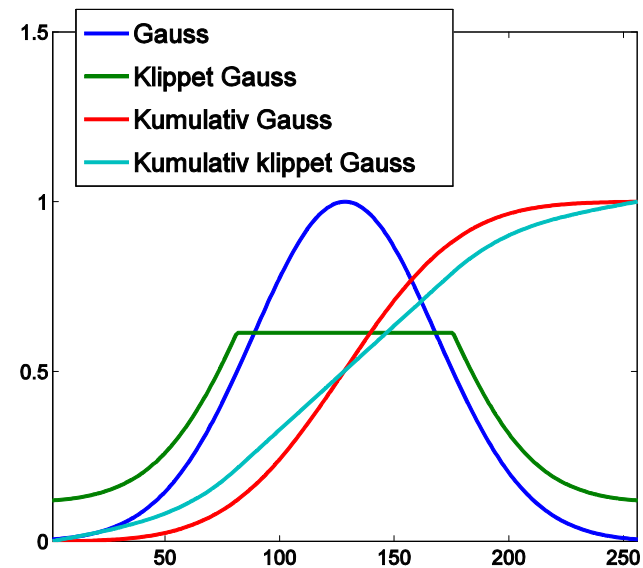
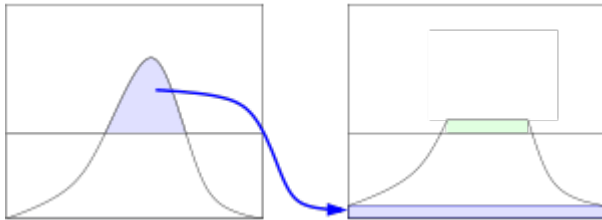
$$g_3(x, y) = \dots + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy}} \quad \leftarrow$$

- Innfører parameteren  $\delta$ :

$$g_4(x, y) = \beta\mu_0 + (1 - \beta)\mu_{xy} \\ + [f(x, y) - \mu_{xy}] \frac{\sigma_0}{\sigma_{xy} + \delta\sigma_0}$$

# Lokal GTT i praksis | histogramutjevning

- En mye brukt variant: CLAHE (contrast limited adaptive histogram equalization)
- Her «begrenser» vi kontrastendringen ved å klippe histogrammet før vi regner ut det kumulative histogrammet.
- Dette gir en transformasjon med lavere stigningstall, som gir mindre kontrastendring



# Lokal GTT - Implementasjon

---

- Lokal kontrastendring er *regnekrevende*
  - Histogramspesifikasjon: Beregne nytt lokalt kumulativt histogram for hver piksel
  - Lineær transform: Beregne ny  $\mu$  og  $\sigma$  sigma for hver piksel
- Benytt overlappet mellom vinduene i det man flytter til neste piksel
  - Løpende oppdatere histogrammet, eller  $\mu$  og  $\sigma$
- Eller, gjør en approksimasjon: Beregn kun transform for hvert n-te piksel, og interpoler mellom transformene

# Sentrale temaer i dag

---

- Histogramtransformasjoner
  - Histogramutjevning
  - Histogramtilpasning
- Standardisering av histogram for billedserier
  - Fjerne effekten av variasjoner i avbildningsforhold (døgnvariasjon, lysforhold, sensorbytte, støv etc)
  - Ikke lurt med histogramtilpasning hvis histogram-formen inneholder informasjon som (senere) skal/kan benyttes
  - Alternativ til standardisering av bilder med lineær transform
- Lokal gråtone-transformasjon
  - Samme kontrast og «lyshet» over hele bildet
  - Beregn og benytt transformene på lokalt vindu rundt hver piksel
  - Kontrastbegrensning (både for lineær strekking og histogramutjevning)
  - Regnekrevende