
IN2070 – vår 2022

Fourier I -- En litt annen vinkling på stoffet i kapittel 4

I dag:

- Sinus-funksjoner i 1D og 2D
- 2D diskret Fouriertransform (DFT)

Neste uke:

- Konvolusjonsteoremet
- Filtre og filtrering i frekvensdomenet
- Vindusfunksjoner

Introduksjon I/II

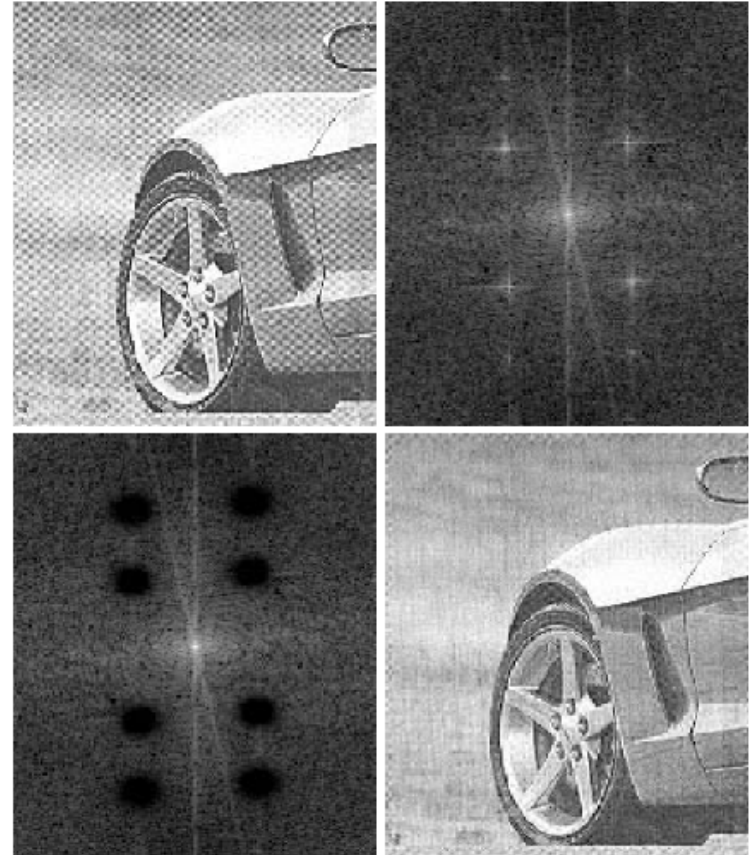
- Et gråtonebilde
 - Typisk representasjon: Matrise av gråtoneintensiteter
 - Fourier: En vektet sum av sinuser og cosinuser med ulik frekvens og orientering



- Et slikt skifte av representasjon kalles ofte et «basis-skifte»

Introduksjon II/II

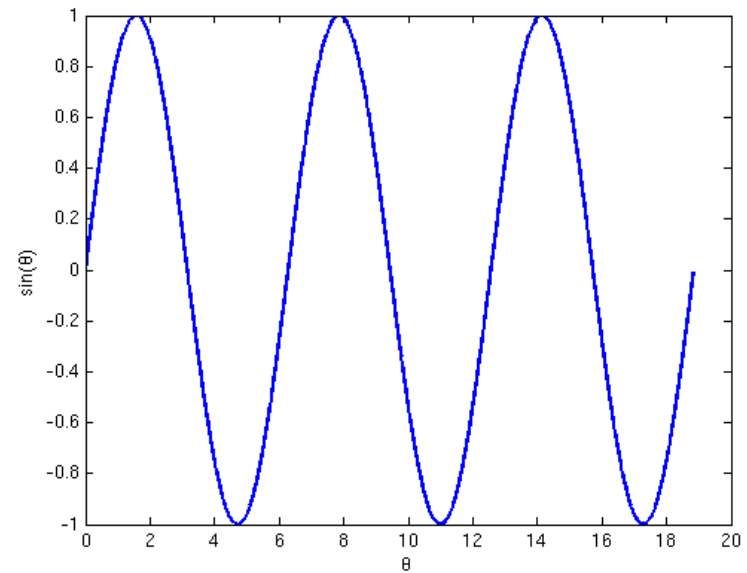
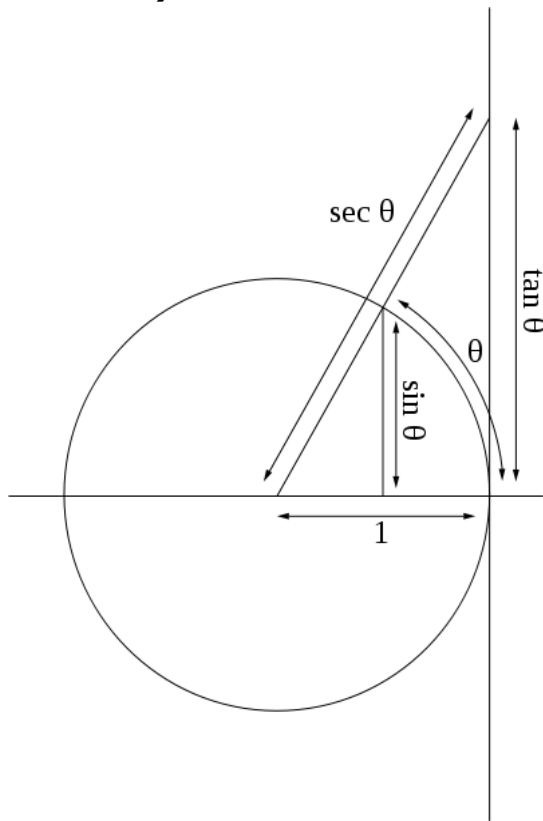
- Hvorfor skifte basis?
 - Analyse (og syntese) av bilder
 - Skarphet, om er orienteringsdominert, etc.
 - Fjerne/dempe periodisk støy
 - Kompresjon
 - Analyse og design av lineære filtre (konvolusjonsteoremet)
 - Egenskapsuttrekning (feks. Tekstur)
 - Rask implementasjon av (større) konvolusjonsfiltre
 - Fordi vi kan!



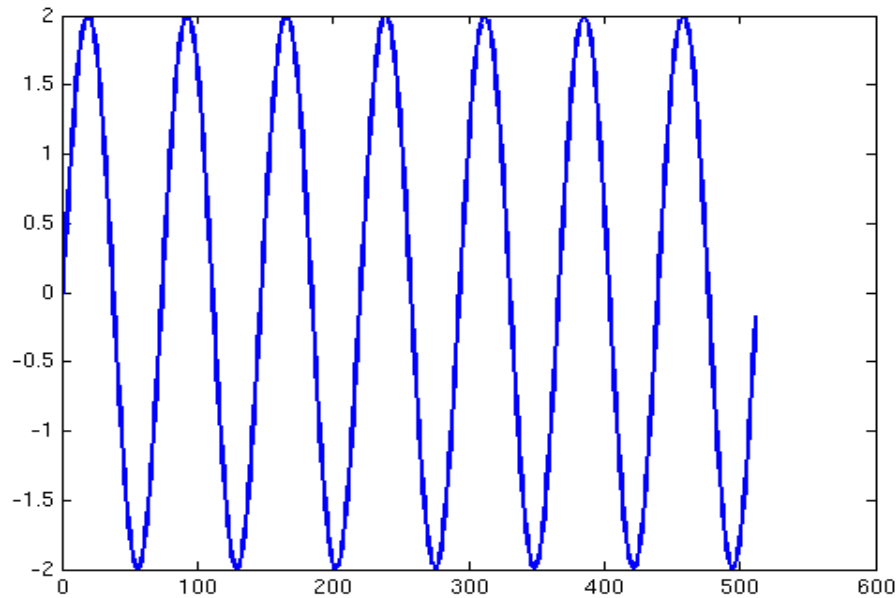
Fjerning av periodisk støy, fig. 4.64 i DIP. Ut-bildet er resultatet av en konvolusjon, men det er vanskelig å designe filteret i billedomenet.

Funksjonen $\sin(\theta)$

$\sin(\theta)$ svinger mellom 1 og -1 når θ varierer mellom 0 og 2π , og den svinger på samme måte når θ varierer mellom 2π og 4π osv. (periodisk)



«Diskret» sin i 1D



$$y(i) = A \sin(2\pi u i / N + \varphi)$$

N : antall sampler

u : antall hele perioder

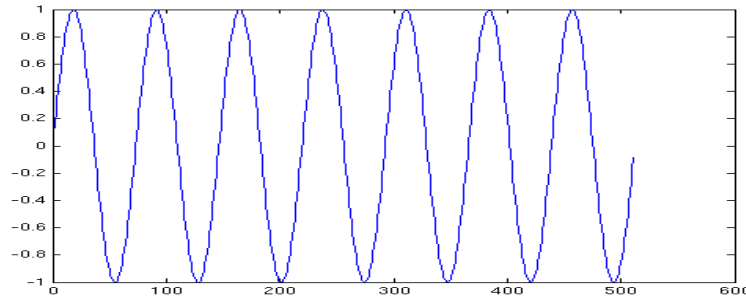
φ : horisontal forskyvning (fase)

A : Amplitude

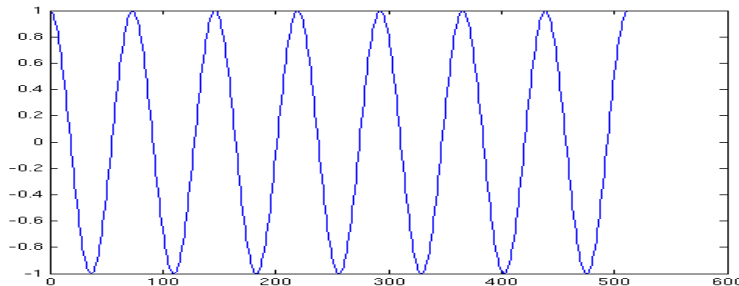
I dette eksemplet er
 $A=2$, $u=7$, $N=512$ og $\phi=0$

Hva er forskjellen på $\sin(\theta)$ og $\cos(\theta)$?

- **$\sin(2\pi ui/N)$** starter på 0 og repeteres u ganger per N samples



- **$\cos(2\pi ui/N)$** starter på 1 og repeteres u ganger per N samples



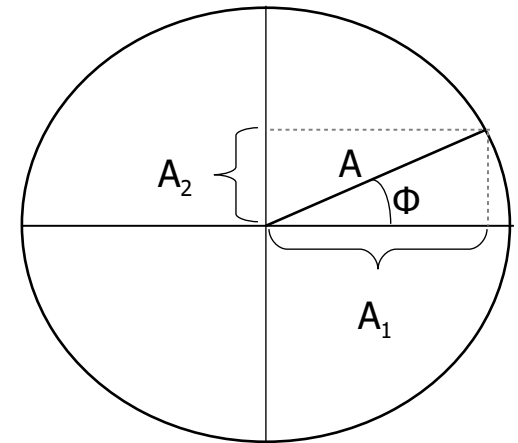
Bare startpunktet, dvs. faseforskyvningen, ϕ , er forskjellig

Hva får vi om vi legger sammen sin og cos?

- $A_1 \sin(\theta_i) + A_2 \cos(\theta_i) = A \sin(\theta_i + \Phi)$,

der $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ og $\Phi = \text{atan2}(A_2, A_1)$

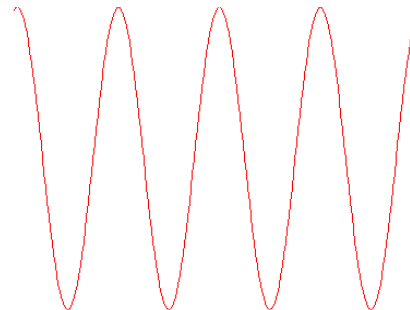
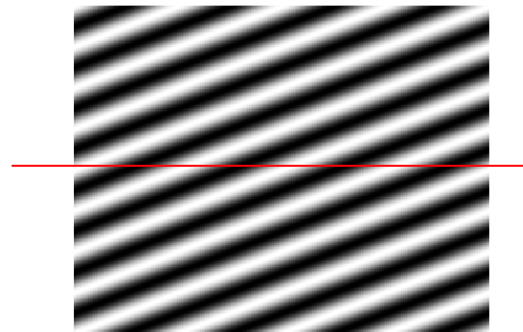
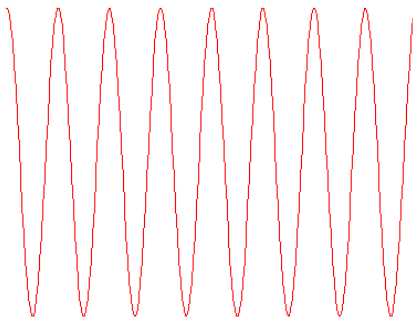
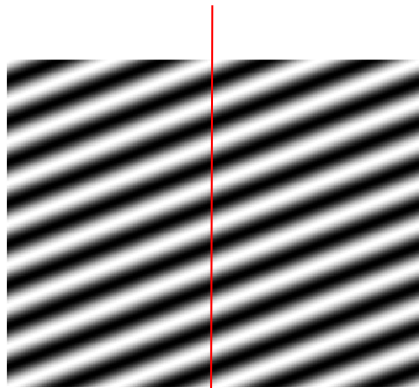
- Vi ender altså opp med en sin-funksjon med samme frekvens, men endret amplitude og fase
- Vi kan også gå andre veien og si at enhver sinus-funksjon med gitt frekvens kan dannes ved å legge sammen en vektet sin- og en vektet cos-funksjon med denne samme frekvensen



Alternativ "koding"/representasjon av informasjonen (A, Φ, θ) er altså (A_1, A_2, θ)

Introduksjon til sinus-funksjoner i 2D

- Vertikal og horisontal komponent



«Diskret» sinus/cosinus i 2D

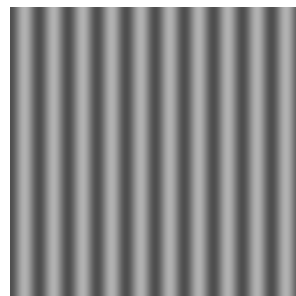
$$f(x, y) = A \sin\left(\frac{2\pi(ux + vy)}{N} + \phi\right)$$

A – amplitude

u – vertikal frekvens

v – horisontal frekvens

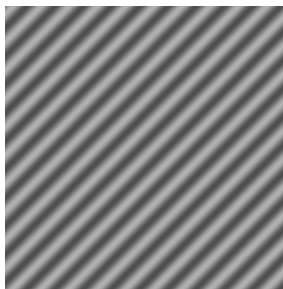
ϕ - faseforskyvning



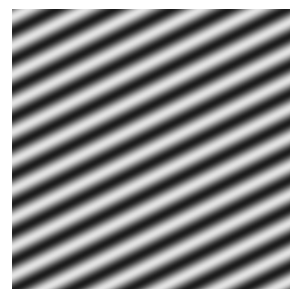
A=50, u=0, v=10



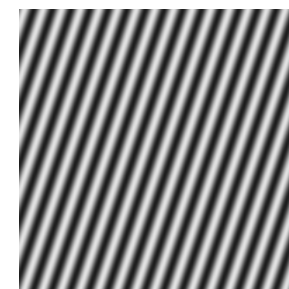
A=20, u=10, v=0



A=50, u=10, v=10



A=100, u=10, v=5

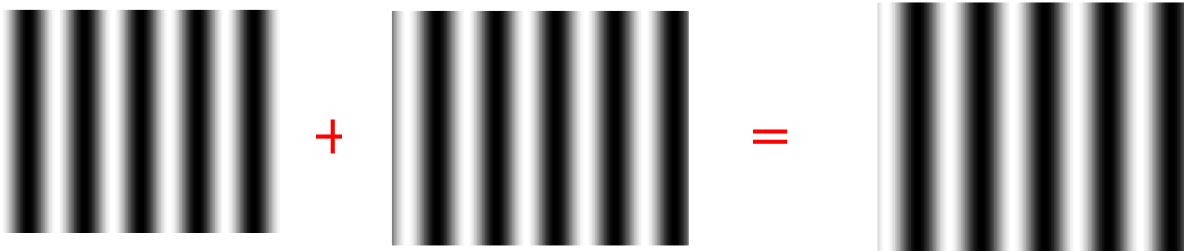


A=100, u=5, v=15

I eksemplene vises 0 som grått,
-127 som sort, og 127 som hvitt

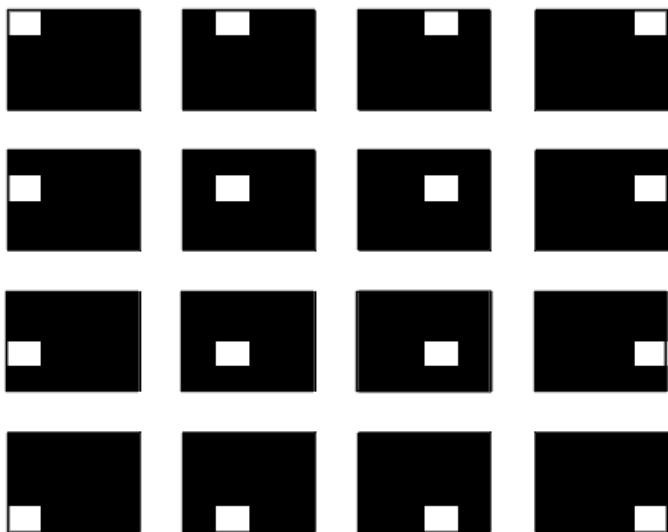
Merk: u og v er antall repetisjoner i bildet vertikalt og horisontalt

Eksempler: Sum av 2D sinfunksjoner



Sum av to bilder med lik frekvens (og lik retning) gir nytt bilde med samme frekvens (og retning), jfr s. 7.

«Basis-bilder»



Sort er 0, hvit er 1.

←
Ortogonal basis for alle
4x4 gråtonebilder.

Eksempel:

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	6

$$= 1 * \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} + 3 * \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array} + \dots + 6 * \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \hline \end{array}$$

Alternativ basis (Fourier)

- Bildene

$$\cos\left(\frac{2\pi(ux + vy)}{N}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-2\pi(ux + vy)}{N}\right)$$

- med frekvensene

$$u = 0, 1, \dots, N-1$$

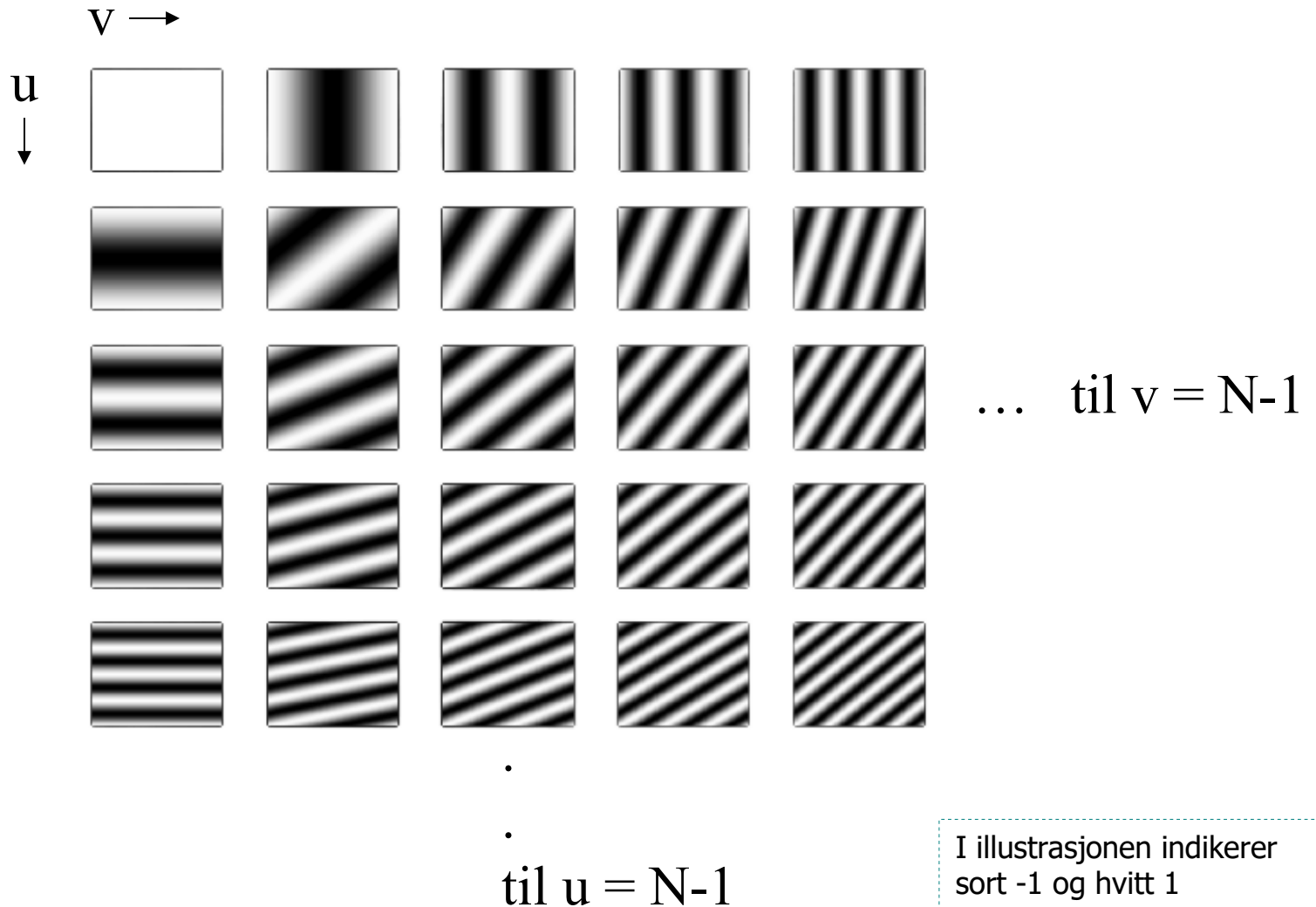
$$v = 0, 1, \dots, N-1$$

- Alle digitale gråtonebilder av størrelse $N \times N$ kan representeres ved en vektet summasjon av disse $N \times N$ sinus- og cosinus-bildene (basisbilder/basisvektorer)

Denne basisen er også ortogonal, sett bort i fra duplikat-komponentene grunnet symmetriene og antisymmetriene til cos og sin (noe vi kommer til om litt)

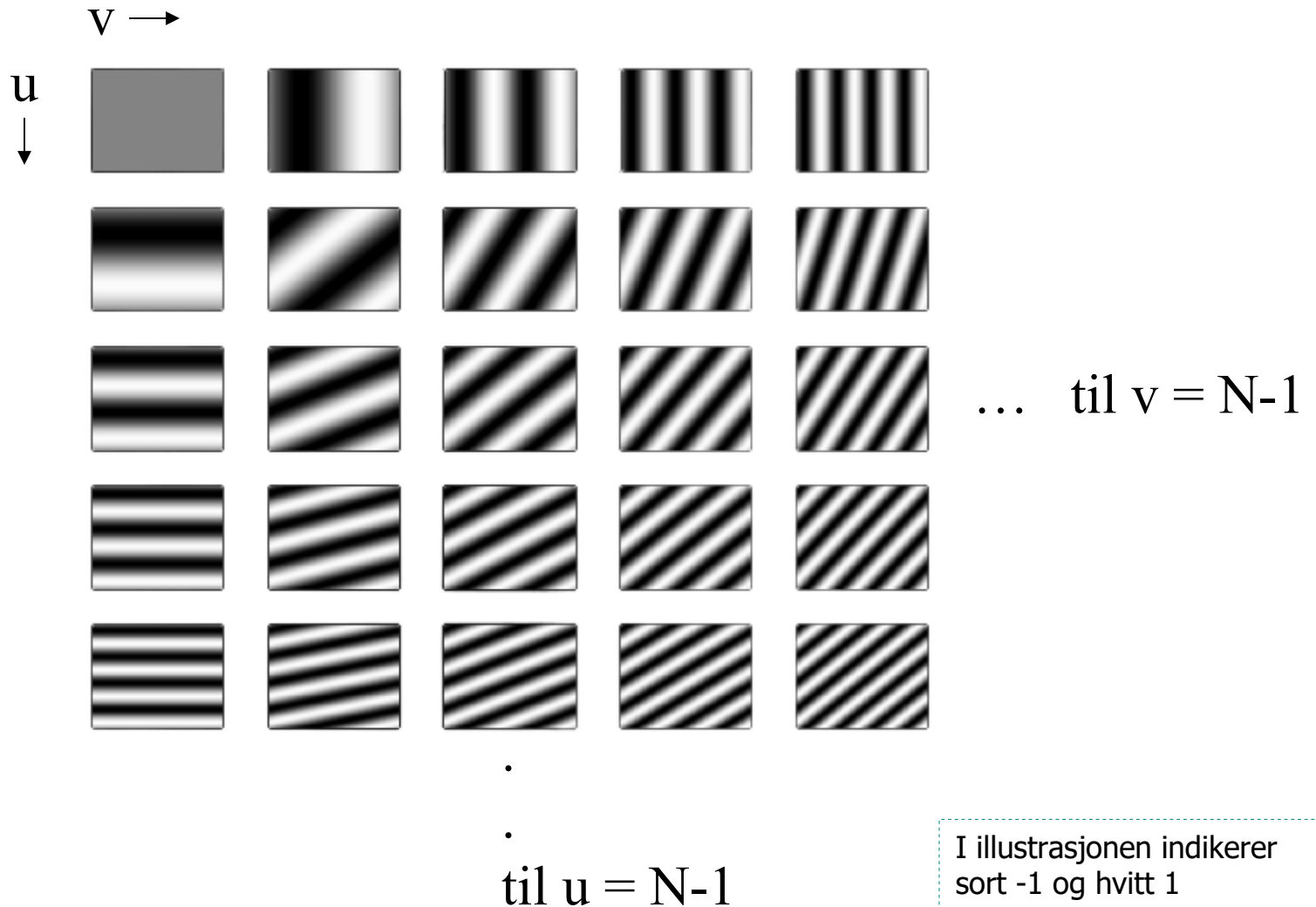
Ved ikke-kvadratiske bilder:
 $\cos(2\pi(ux/M + vy/N))$
 $\sin(-2\pi(ux/M + vy/N))$

Basisbilder - cosinus



I illustrasjonen indikerer
sort -1 og hvitt 1

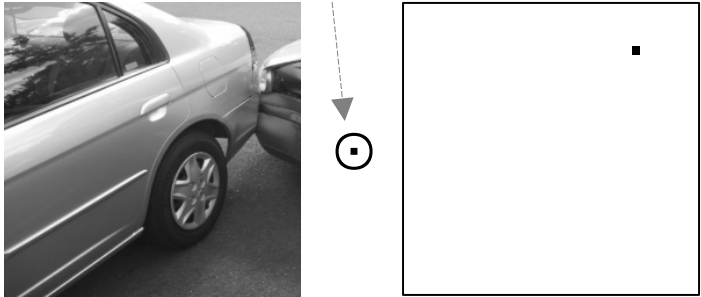
Basisbilder - sinus



Hvordan finne bidraget fra et gitt basisbilde?

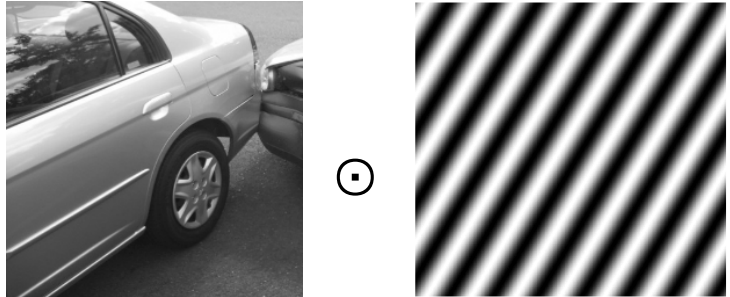
Elementvis multiplikasjon

"Vanlig" basis med bare 0-ere og ett piksel lik 1

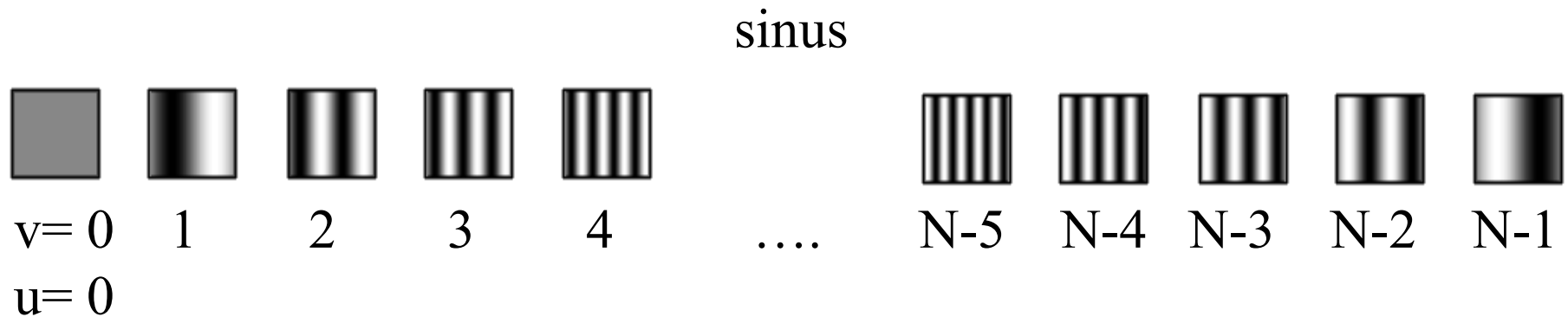
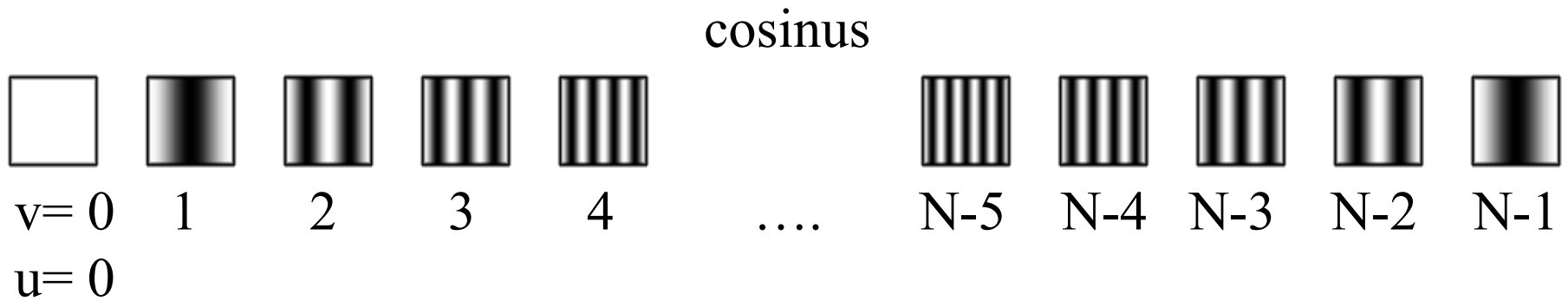
$$\text{sum} \left(\text{Elementvis multiplikasjon} \left(\text{Bilde} \otimes \text{Basisbilde} \right) \right) \approx 255 \text{ (bakre del av bilen)}$$


- $$\text{sum} \left(\text{Elementvis multiplikasjon} \left(\text{Bilde} \otimes \text{Basisbilde} \right) \right)$$

Bidraget finnes altså ved indreproduktet mellom bildet og basisbildet

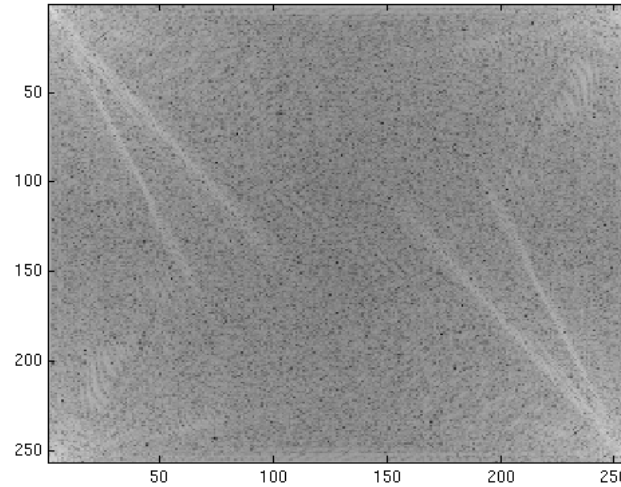
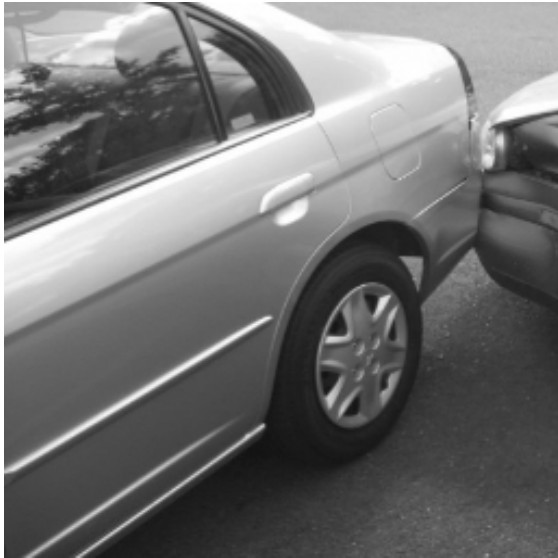


Symmetri i basisbildene

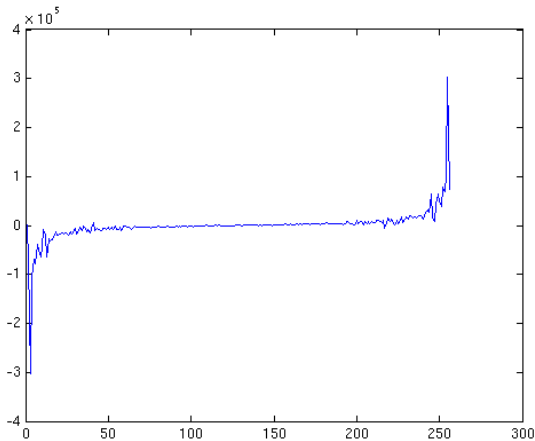


(antisymmetri i sinus-bildene)

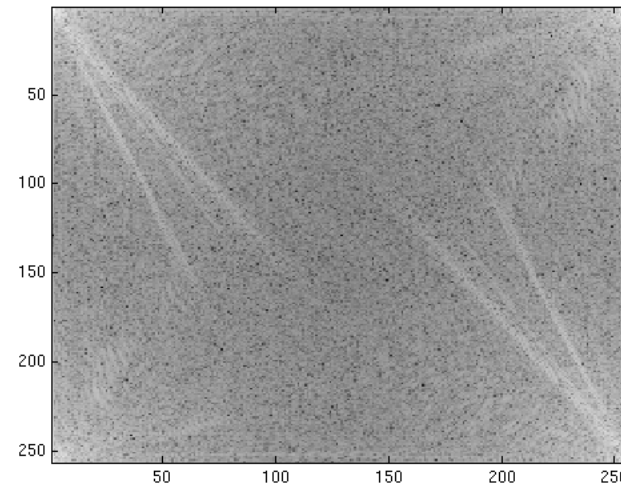
Eksempel (symmetri)



Logaritmen til
absoluttverdien til
cosinus-bidragene



Første linjen i sinus-bidragene



Logaritmen til
absoluttverdien til
sinus-bidragene

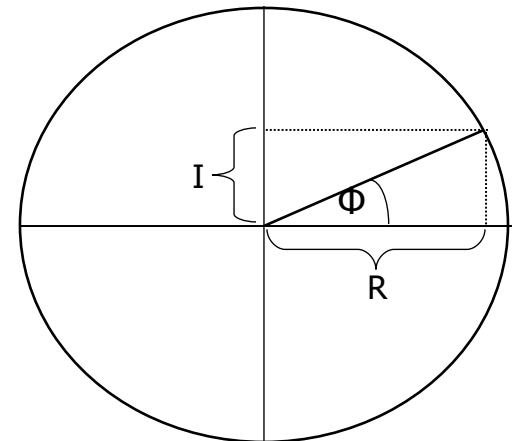
Finne fase og amplitude

- La R inneholde cosinus-bidragene og I inneholde sinus-bidragene.
- Fasen til sinfunksjonen med frekvens u, v :

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right)$$

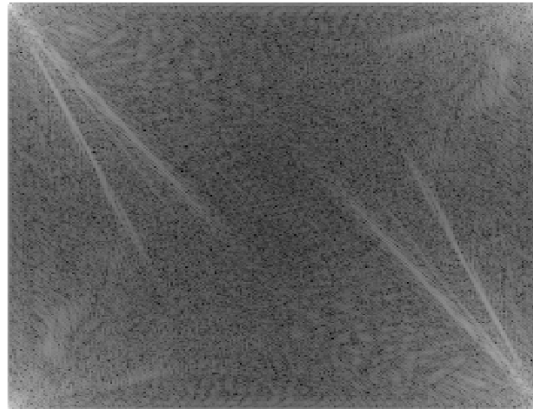
- Amplituden til sinfunksjonen med frekvens u, v :

$$A = \sqrt{R(u, v)^2 + I(u, v)^2}$$



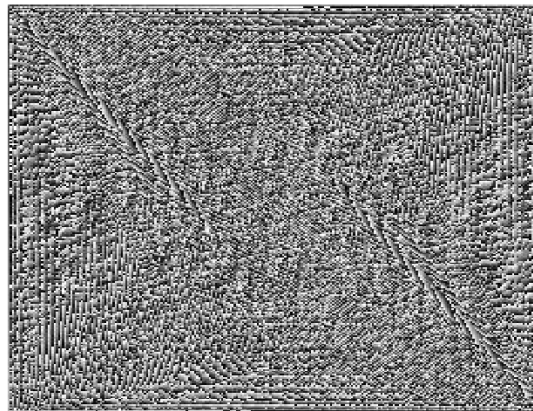
Husk fra s. 7: $(A, \Phi, \theta) \Leftrightarrow (A_1, A_2, \theta)$

Eksempel: Amplitude og fase



(Log av) amplituden
eller spekteret

Forteller noe om
hvilke frekvenser
bildet inneholder



$\phi(u,v)$ - fasen

Visuelt ser fasebildet
ut som støy, men
fasen inneholder viktig
informasjon

Resultat som komplekst tall

- Letter håndtering (og utvider bruksområdet) ved å representere resultatet med *komplekse tall*: cosinus-bidragene i realdelen og sinus-bidragene i imaginærdelen
- La F beskrive bildet i den nye basisen
- $F(u,v) = R(u,v) + jI(u,v)$, $j = \sqrt{-1}$
- Amplitude og fase kommer da ut som modulus og argument (lengde og vinkel i komplekse planet)

2D diskret Fouriertransform (DFT)

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) e^{-2j\pi(ux/N + vy/M)}$$

Husk at $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$, slik at vi ender opp med sin/cos-basisen vi er vant med:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{M-1} f(x, y) \left[\cos(2\pi(ux/N + vy/M)) + j \sin(-2\pi(ux/N + vy/M)) \right]$$

Den inverse transformen:

$$f(x, y) = \frac{1}{NM} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{M-1} F(u, v) e^{2j\pi(ux/N + vy/M)}$$

Egenskaper ved 2D DFT

- $F(u,v)$ er periodisk:

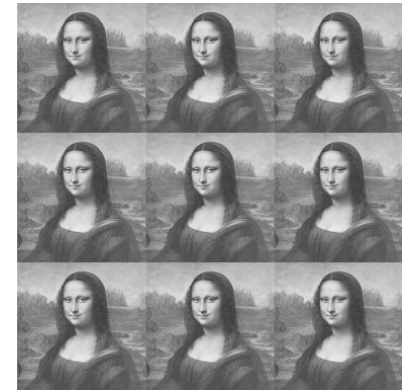
$$F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+N) = F(u+N,v+N)$$

- Skal inverstranformen holde, må vi anta at bildet er periodisk:

$$f(x,y) = f(x+N,y) = f(x,y+N) = f(x+N,y+N)$$

- Konjugert symmetri:

Hvis $f(x,y)$ er reell,
er $F(u,v) = \text{conj}(F(-u,-v))$
Altså er $|F(u,v)| = |F(-u,-v)|$



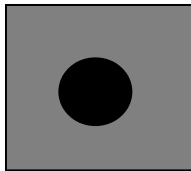
Om ikke annet er oppgitt, antar vi at $N=M$ for enklere notasjon

Egenskaper ved 2D DFT, forts

- $F(0,0)$ er proporsjonal med middelveidien i bildet
- Shift-teoremet: $f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)/N}$
- 2D DFT er separabelt i to 1D DFT
 - Absolutt nødvendig (sammen med FFT-algoritmen) for å beregningsmessig kunne transformere bilder av en viss størrelse

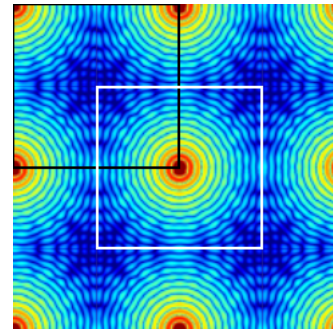
Framvisning av amplitudespekteret I/II

- Siden $F(u,v)$ er periodisk med periode N , er det vanlig å forskyve spekteret slik at origo ($u=v=0$) ligger midt i bildet
 - Bytte kvadranter
 - [eller pre-multiplisere $f(x,y)$ med $(-1)^{x+y}$]



$f(x,y)$

$f(x,y)$: billedomenet



$|F(u,v)|$

$F(u,v)$: frekvensdomenet

$|F(u,v)|$ kalles spekteret til $f(x,y)$
(amplitudespekteret)

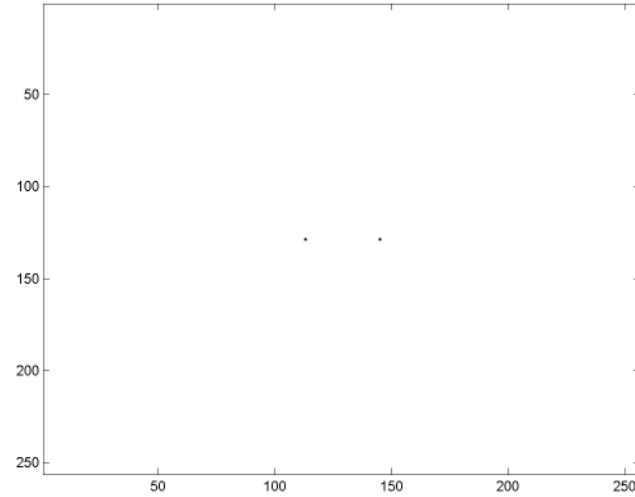
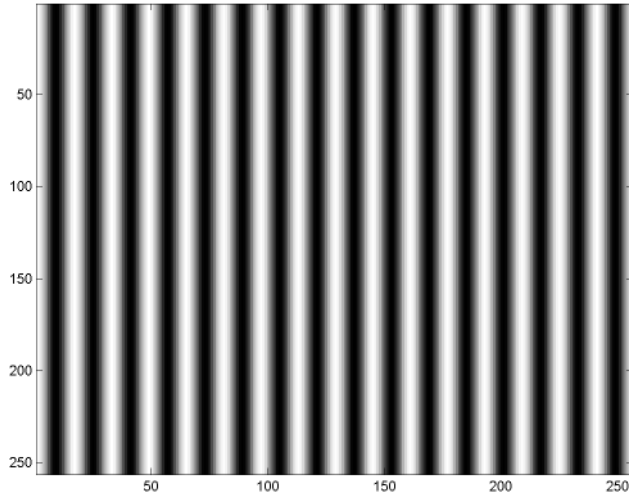
("Powerspekteret": $|F(u,v)|^2$)

Framvisning av amplitudespekteret II/II

Skalering av verdier:

- Ofte stor dynamikk i $|F(u,v)|$ (kan ha høye verdier)
- Vanlig å benytte logaritmisk skala
 - Vi er mer interessert i størrelsesforhold i amplitude mellom frekvenser enn absolutt forskjell
 - $g(u,v) = \log(|F(u,v)|)$, som så eventuelt skaleres/affintransformeres slik at man får gråtoner mellom 0 og 255 (8 bit)

Eksempler

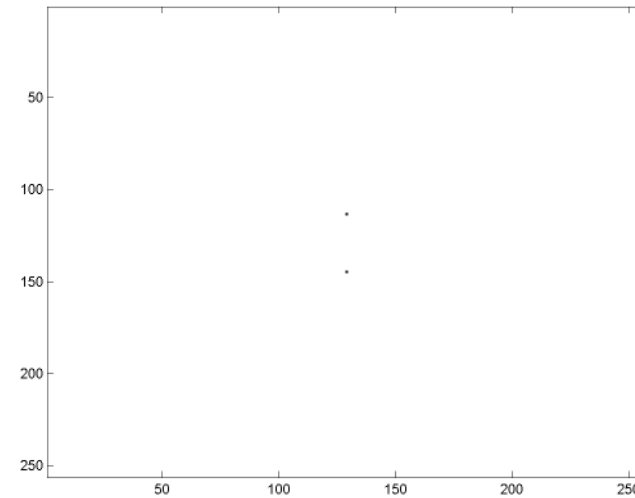


<- spekter

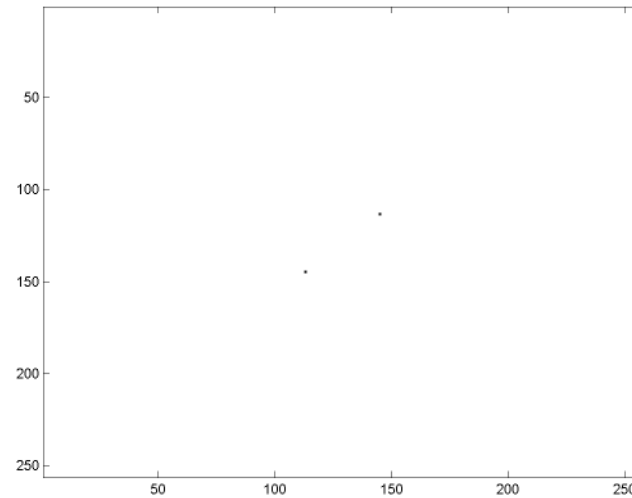
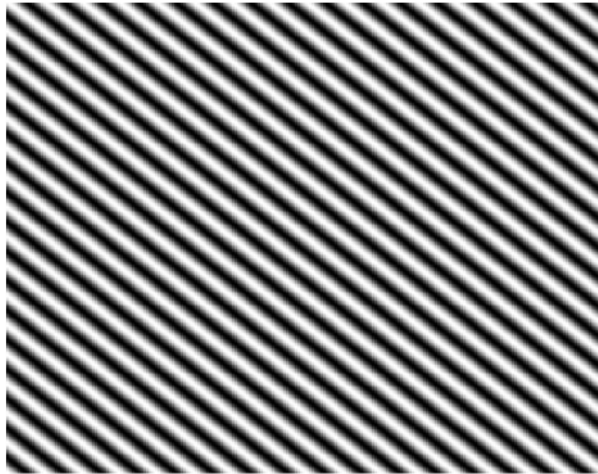
Her:

- Hvitt=0

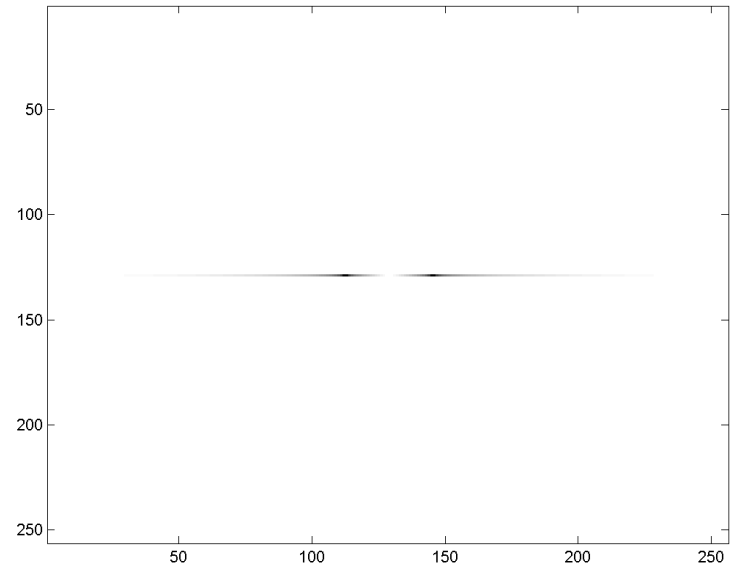
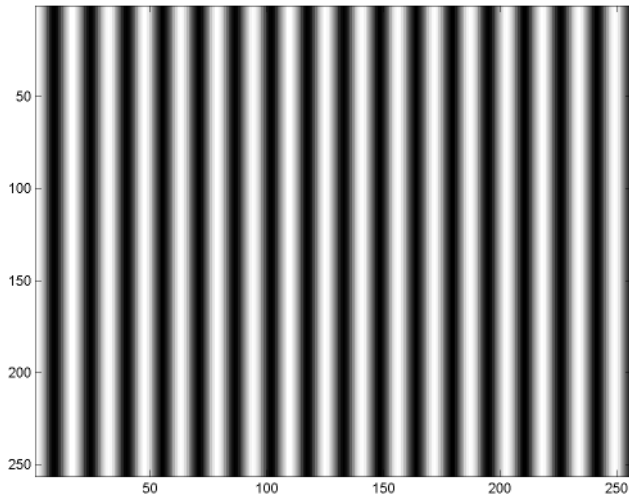
- Nullfrekvensen
midt i bildet



Eksempel – "skrå" frekvens



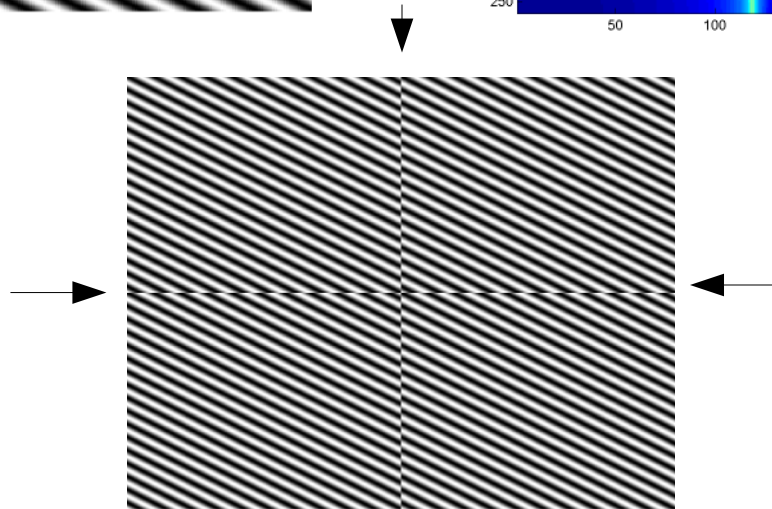
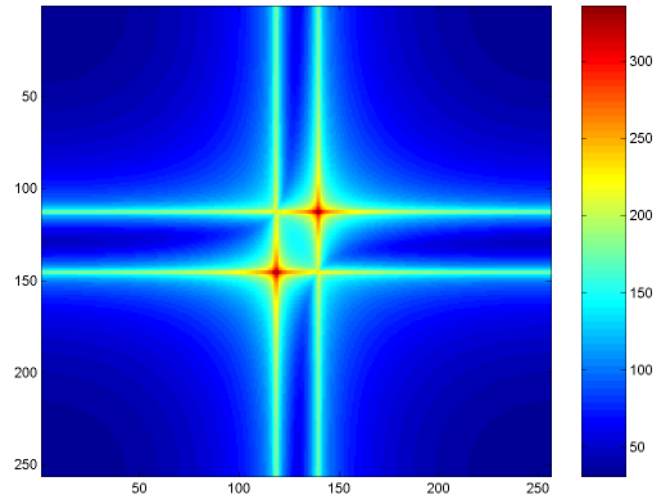
Eksempel - diskontinuitet



Ved å repetere bildet, ser vi tydelig kanter:



Eksempel – diskontinuitet II



Eksempel - vanlige objektformer

Examples of the Fourier transform for other simple shapes are shown be

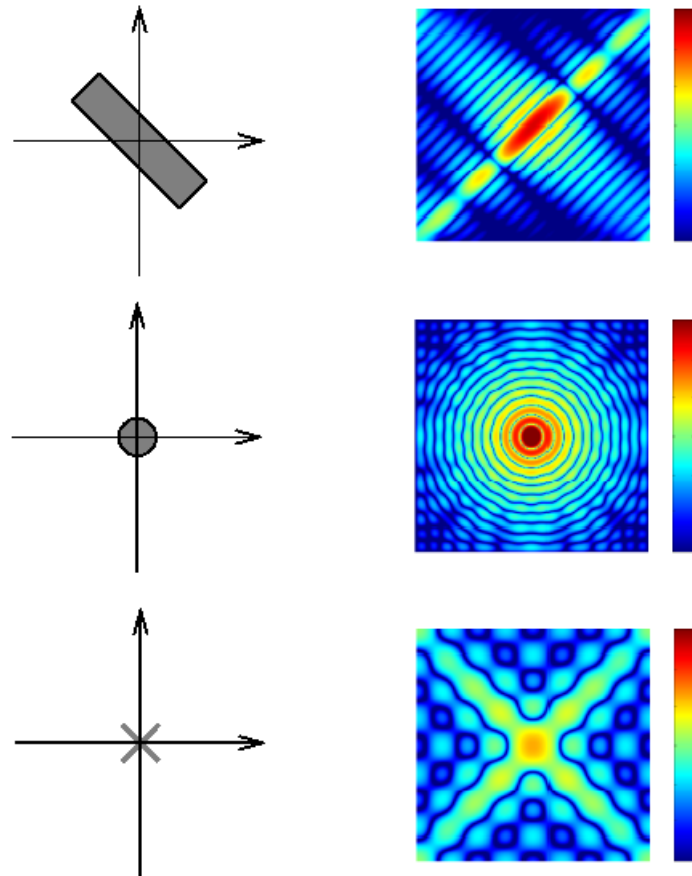
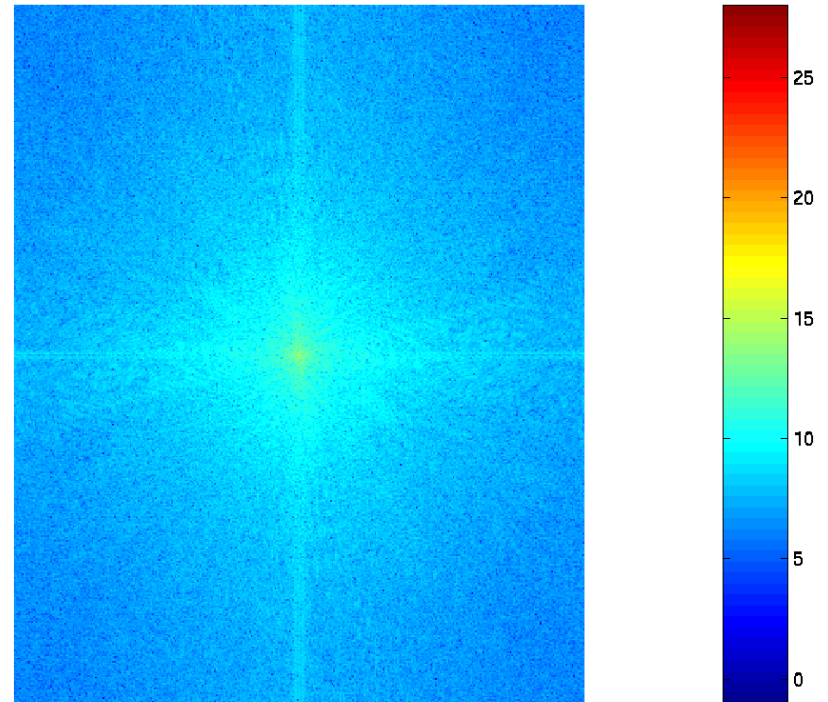
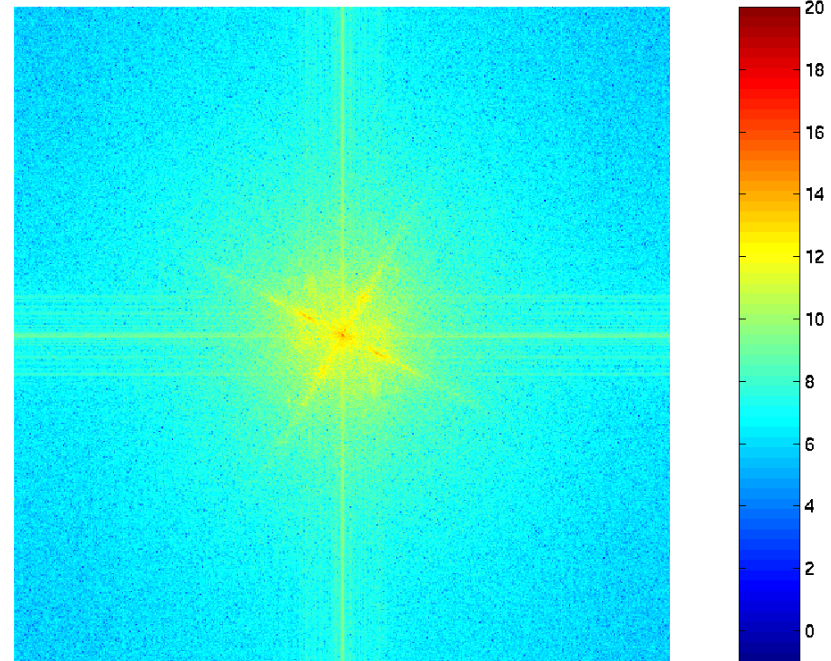
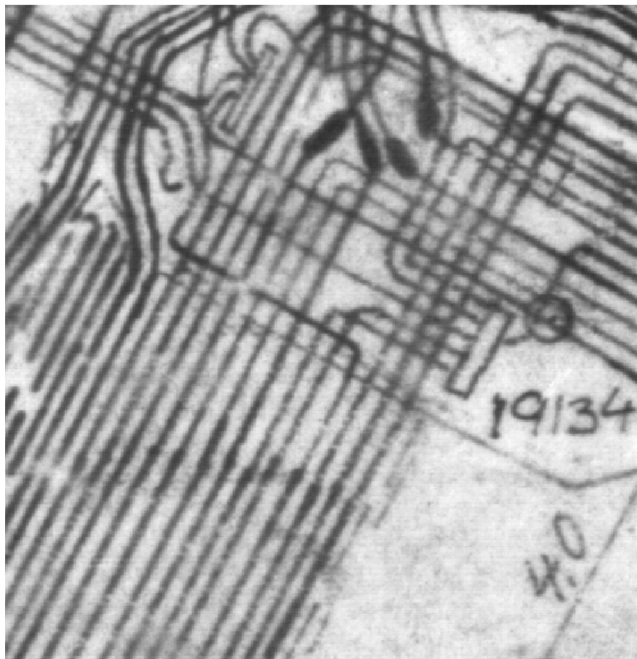


Figure 7-4: Fourier Transforms of Some Simple Shapes

Eksempel – “vanlig” bilde



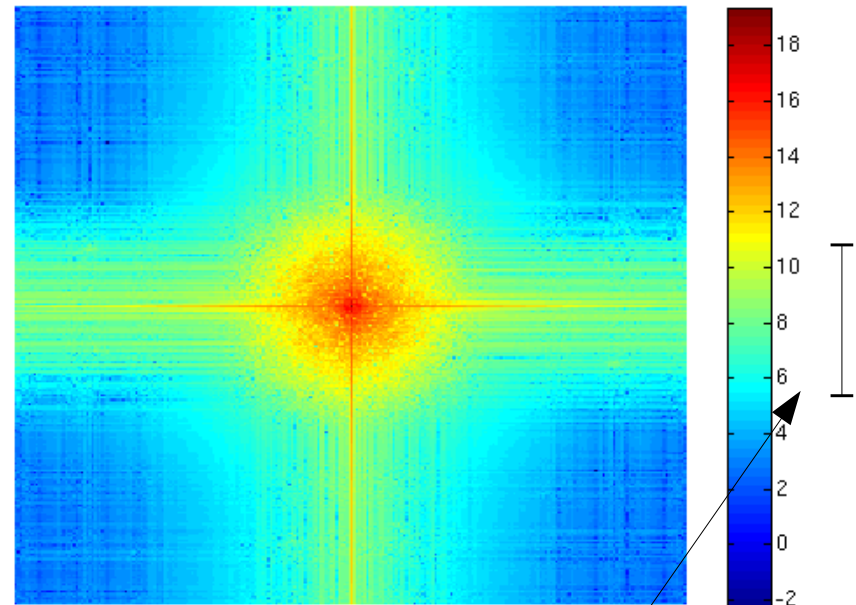
Eksempel - retningsdominant



Eksempel - smal båndbredde



Lav oppløsning, lite detaljer



Så å si all «energien» er i dette smale området/båndet (både vertikalt og horisontalt)

Noen observasjoner ..

- Vanligvis størst bidrag/mest energi i spekteret for lave verdier av u, v
- Bidrag langs u - og v -aksen fordi bildet er implisitt periodisk og vi har diskontinuiteter langs kantene
- Linjestructurer i gitt retning i billedomenet har linjestructur normalt på retningen i Fourier-domenet

.. og noen observasjoner til

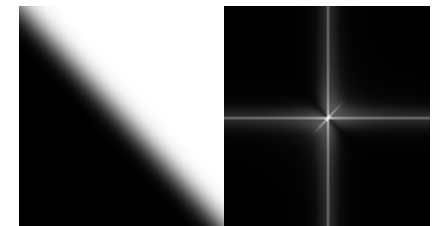
- Skarp kant:
 - Tilsvarende sum av mange sinusfunksjoner
 - Mange Fourier-koeffisienter er $\neq 0$
 - Bredt bånd i Fourier-domenet



Bilde

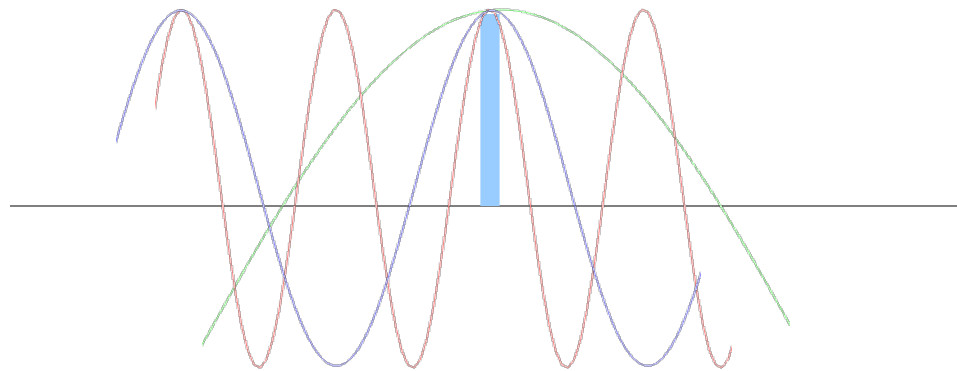
Fourier-
spekter

- "Blurret" kant:
 - Tilsvarende færre sinusoider
 - Smalere bånd i Fourier-domenet

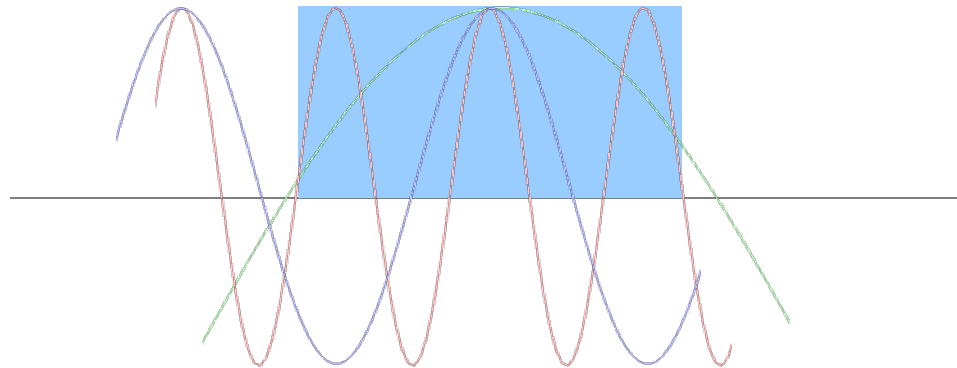


- Tommelfingerregler:
 - Smal struktur i bildedomenet : Bred struktur i Fourier-domenet
 - Bred struktur i bildedomenet: Smal struktur i Fourier-domenet
 - Linjestruktur i retning θ i bildedomenet: Linjestruktur i retning $\theta \pm 90^\circ$ (normalt på) i Fourier-domenet

Intuisjonsbygging rundt smal struktur i billedomenet -> bred struktur i Fourier-domenet, og omvendt



Høyt utslag/indreprodukt på **alle tre frekvensene**



Høyt utslag/indreprodukt **kun på laveste frekvens**

Implementasjon av DFT

- Beregning av $F(u,v)$ for én u,v : $O(N^2)$
- Beregning for hele bildet: $N \times N$ $F(u,v)$: $O(N^4)$
- Finnes en algoritme for rask beregning, 2D FFT (Fast Fouriertransform)
 - Benytter at Fourier-transformen er separabel i to 1D transformer
 - Bruker bilder (eller delbilder) med størrelse 2^k (k er heltall)
 - Har orden $O(N^2 \log_2 N)$

Fourier-transform i Matlab/Octave

- `F = fft2(f);` % Gjør en 2D DFT-transform
- `f = ifft2(F);` % .. og den inverse transformen (obs: mulige spor av imaginære avrundingsrester)

- `F_r = real(F);` % Realdelen, altså cosinus-basis-bidragene
- `F_i = imag(F);` % Imaginærdelen, altså sinus-basis-bidragene

- `F_s = abs(F);` % Fourier-spekteret
- `F_p = angle(F);` % Fasen

- `F_r(u+1,v+1);` % Gir "cosinus-bidragene" for frekvens u,v

- `F_r(1,1);` % Gir "DC-komponenten" / nullfrekvensen

- `fftshift` og `ifftshift`: Flytter kvadranter slik at nullfrekvensen er i midten av bildet, samt omvendt

- `imagesc(fftshift(log(F_s)), [0 max(log(F_s(:)))]);` % Her: Viser alle verdier <0 som sort

Oppsummering

- Sinus-funksjoner
 - 1D og 2D
 - «diskret» parametrisering: $\sin\left(\frac{2\pi(ux + vy)}{N}\right)$
 - dekomponere $A\sin(\theta i + \phi)$ i sin- og cos-komponent
- Diskret Fourier-transform
 - bildet beskrevet med cos/sin-basisbilder
 - kompleks representasjon
 - cos- og sin-ledd som reell- og imaginær-komponent
 - implisitt periodisitet
 - utslag i diskontinuitet -> "ekstra" frekvenser
 - fremvisning av spekteret $|F(u,v)|$
 - tommelfingerregler