# IN2070 – Digital bildebehandling

## Kompresjon og koding – I

Basert på slides fra Fritz Albregtsen

Tre steg i kompresjon: transform, kvantisering og koding
Redundanser
Koding og entropi
Shannon-Fano-koding
Huffman-koding
Aritmetisk koding

Kompendium: 18-18.3, 18.5-18.7.2, 18.7.4 og Appendiks B

# Anvendelser

- Kompresjon benyttes for å **redusere antall biter** som brukes for å beskrive bildet (eller en god tilnærming av bildet).
- En mengde anvendelser innen datalagring og dataoverføring.
  - Televideokonferanser
  - Fjernanalyse / meteorologi
  - Overvåking / fjernkontroll
  - Telemedisin / medisinske arkiver (PACS)
  - Dokumenthåndtering / FAX
  - Multimedia / nettverkskommunikasjon
  - Mobil kommunikasjon
  - MP3-spillere, DAB-radio, digitalkameraer, …
- **Tidsforbruket er viktig**, men det varierer om man ønsker å minimere kompresjonstiden eller dekompresjonstiden.
  - Det man gjør oftest ønsker man at tar kortest tid. Asymmetrisk kompresjon?
  - Begge tidene kan være omtrent like viktige. Symmetrisk kompresjon?

# Eksempler: Plassbehov uten kompresjon

- Digitalt RGB-bilde:
  - 512 x 512 x 8 biter x 3 farger = 6 291 456 biter ≈ 0,79 MB
  - 3264 x 2448 x 8 biter x 3 farger = 191 766 528 biter ≈ 24 MB
- Røntgen-bilde:
  - 7 112 x 8 636 piksler à 12 biter: 737 030 784 biter ≈ 92 MB
- Radarbilde fra Radarsat-1-satellitten:
  - 400 MB, 300 km × 300 km, 16 biter per piksel.
  - For miljøovervåkning av Middelhavet:
    28 slike bilder trengs for å dekke hele Middelhavet.
- 3D-seismikk-data fra 60 000 $km^2$ i Nordsjøen.
  - 4 TB = 4 000 GB = 4 000 000 MB

# Plass og tid

- Digitale data kan ta stor plass.
  - Spesielt lyd, bilder og video.

- Eksempler:
  1. Digitalt bilde:

     512 x 512 x 8 biter x 3 farger = 6 291 456 biter
  2. Røntgenbilde:

     7112 x 8636 x 12 biter = 737 030 784 biter

- Overføring av data tar tid:

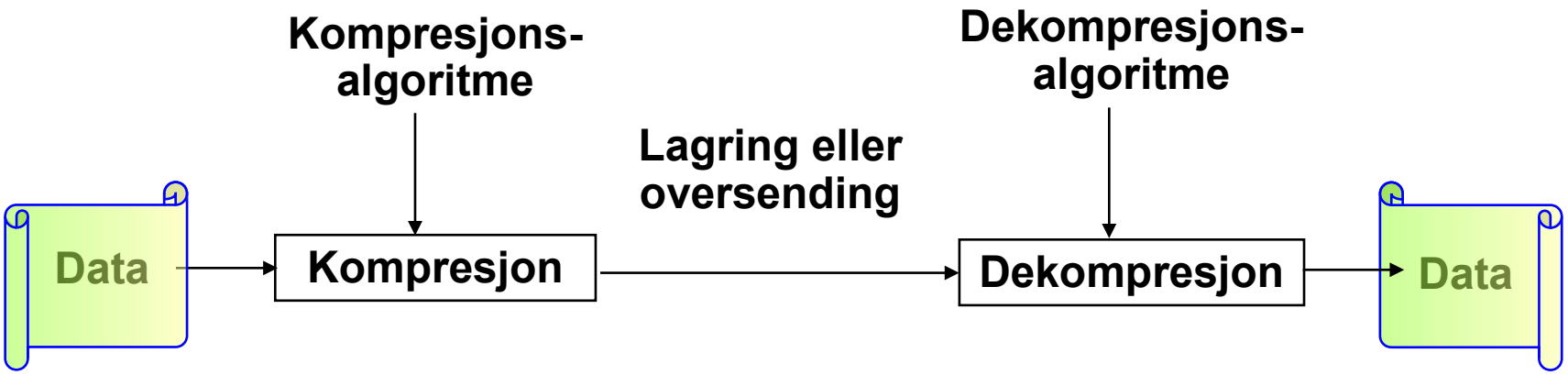
| **Linje med 64 kbit/sek:** | **Linje med 1 Mbit/sek:** |
|---|---|
| **1. ca. 1 min. 38 s.** | **1. ca. 6 s.** |
| **2. ca. 3 timer 12 min.** | **2. ca. 12 min.** |

# SI-prefikser og binære prefikser

- Overføringshastigheter og linjekapasitet angis **alltid** med SI-prefikser, oftest som antall biter per sekund:
  - 1 kbps = 1000 bps = $10^3$ biter per sekund
  - 1 Mbps = 1000 kbps = $10^6$ biter per sekund
  - 1 Gbps = 1000 Mbps = $10^9$ biter per sekund
  - 1 Tbps = 1000 Gbps = $10^{12}$ biter per sekund

- Filstørrelser er oftest gitt med binære prefikser:
  - Kibibyte (KiB = $2^{10}$ byte = 1 024 byte),
  - Mebibyte (MiB = $2^{20}$ byte = 1 048 576 byte),
  - Gibibyte (GiB = $2^{30}$ byte = 1 073 741 824 byte),
  - Tebibyte (TiB = $2^{40}$ byte = 1 099 511 627 776 byte)

# Kompresjon og dekompresjon

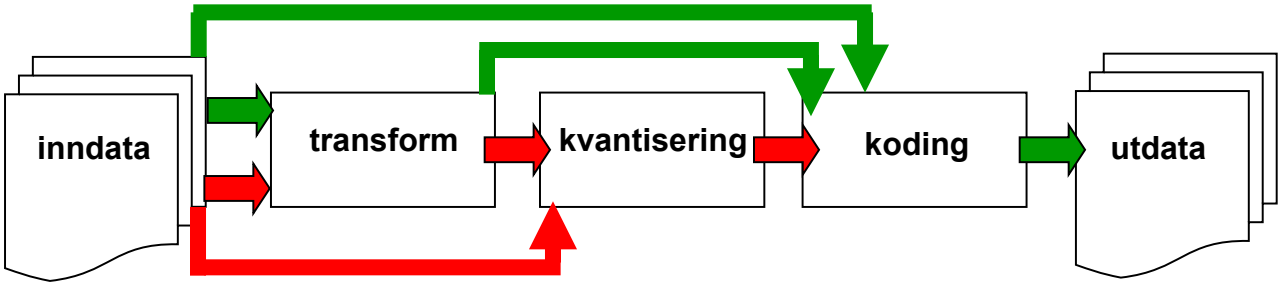



- **Bildekompresjon** består i å representere informasjonen i bildet ved bruk av færre biter og ev. å ikke lagre redundant informasjon.
  - Bildet **komprimeres** og deretter lagres eller overføres dataene.
  - Når bildet senere skal brukes, så **dekomprimeres** dataene.

- Koding/dekoding er en del av kompresjon/dekompresjon, men målet med kodingen er å bruke færrest mulig biter, ikke å hemmeligholde eller skjule informasjon.

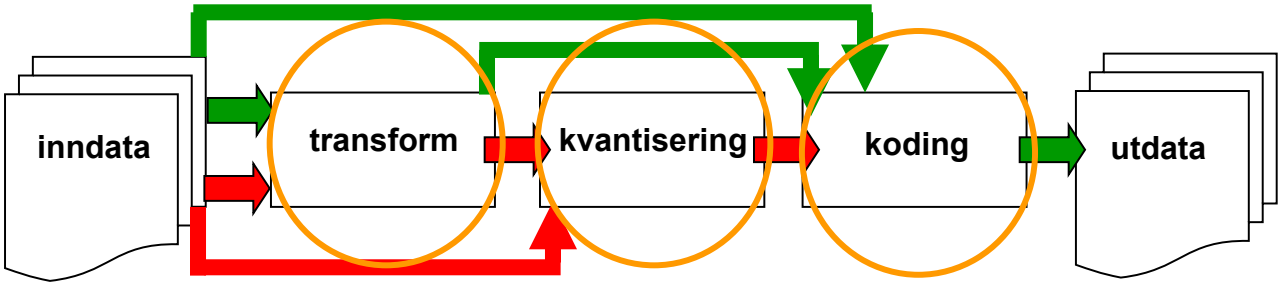
# Kompresjon

- Kompresjon kan deles inn i tre steg:
  - **Transform** - representer bildet mer kompakt.
  - **Kvantisering** - avrunder representasjonen.
  - **Koding** - produserer en kodebok.




- Kompresjon kan gjøres:
  - **Eksakt / tapsfri** (eng.: *lossless*) – følg de grønne pilene.
    - Kan da eksakt rekonstruere det originale bildet.
  - **Ikke-tapsfri** (eng.: *lossy*) – følg de røde pilene.
    - Kan da (generelt) ikke eksakt rekonstruere bildet.
    - Resultatet kan likevel være «godt nok».
  - Det finnes en mengde ulike metoder innenfor begge kategorier.

# De tre stegene i kompresjon




- Mange kompresjonsmetoder er basert på å **representere** bildet på en annen måte, altså **transformer** av original-bildet.
  - Eks.: Differansetransform, løpelengde-transform.
- Hvis vi **kvantiserer** det (originale eller transformerte) bildet, så kan ikke dette reverseres ⇒ ikke-tapsfri kompresjon.
- Til slutt **koder** vi, dvs. transformerer melding til binærrepresentasjon.
  - Baserer seg ofte på normaliserte histogrammer.
- **Kodingene** vi bruker **er alltid reversible.**
- **Transformene** vi bruker **er alltid reversible.**
- **Kvantisering er ikke reversibelt!**

# Melding, informasjon og data

- **Melding:** Teksten eller bildet som vi skal lagre eller sende.

- En melding inneholder en viss mengde informasjon.
- **Informasjon:** Et matematisk begrep som kvantifiserer hvor overraskende / uventet en melding er.
  - Et varierende bilde har mer informasjon enn et monotont bilde.
  - I bilder har kanter rundt objekter høyt informasjonsinnhold, spesielt kanter med mye (geometrisk) krumning.

- **Data:** En bitsekvens som representerer meldingen.

# Redundans

- Vi kan bruke ulike mengder data på samme melding.
  - Anta meldingen er «13».
    - Med ISO 8859-1 trengs 16 biter; 00110001 00110011
    - Med 8-biters naturlig binærkoding trengs 8 biter; 00001101
    - Med 4-biters naturlig binærkoding trengs 4 biter; 1101

- **Redundans**: Det som kan «fjernes» fra dataene uten å miste (relevant) informasjonen.
  - Med «fjerne» menes her å redusere plassen dataene tar.

- I kompresjon ønsker vi å fjerne redundante biter.

# Fire typer redundans

- Psykovisuell redundans. → Mer generelt: **Irrelevant informasjon**: Unødvendig informasjon for anvendelsen, f.eks. for visuell betraktning av hele bildet.
  - Det finnes informasjon vi ikke kan se.
    - Eksempler på enkle muligheter for å redusere redundansen: Subsample eller redusere antall biter per piksel.
- Interbilde-redundans.
  - Likhet mellom nabobilder i en tidssekvens.
    - Kan reduseres ved å lagre noen bilder i tidssekvensen og differanser.
- Intersampel-redundans.
  - Likhet mellom nabopiksler.
    - Kan reduseres ved å løpelengde-transformere hver linje i bildet.
- Kodings-redundans.
  - Enkeltsymboler (enkeltpiksler) blir ikke lagret optimalt.
  - Gitt som gjennomsnittlig kodelengde minus et teoretisk minimum.
    - Velg en metode som er «grei» å bruke og som gir liten kodingsredundans.

# Kompresjonsrate og redundans

- **Kompresjonsraten:**

$$CR = \frac{b}{c}$$

der $b$ er (det faste) antall biter per symbol i den ukomprimert datamengden, og $c$ er gjennomsnittlig antall biter per symbol i den komprimerte datamengden.

  - I et ukomprimert bilde blir alle pikslene lagret separat med naturlig binærkoding.

- **Relativ redundans:**

$$R = 1 - \frac{1}{CR} = 1 - \frac{c}{b}$$

  - Også kalt plassbesparelse (eng. *space savings*).
  - Ofte oppgitt i prosent.
  - Prosentverdien kan kalles «percentage removed»:

$$PR = 100\,R = 100\left(1 - \frac{c}{b}\right)$$

# Kodings-begreper

- **Alfabet**: Mengden av alle mulige symboler (i bilder: alle mulige gråtoner).
- Ofte får hvert symbol et ***kodeord***.
- **Kodebok**: Alle kodeordene og deres betydning.
- Kodingene vi bruker er **reversible**.
  - Denne egenskaper kalles for **unik dekodbarhet**; en kodeord-sekvens kan dekodes på én og bare én måte.
    - Vi kan betrakte ikke-reversible kodinger som en kombinasjon av en kvantifisering og en reversibel koding.
  - Hvis hvert symbol har et kodeord betyr dette at kodeordet skal entydig gi det originale symbolet.
- **Instantant dekodbare koder** kan dekodes uten skilletegn.

# Naturlig binærkoding

- Alle kodeord er like lange.
- Symbolets kode er binærrepresentasjonen til symbolets (null-indekserte) indeks.
  - Man legger til 0-ere foran slik at koden får den ønskelige lengden.
- Eks: En 3-biters naturlig binærkode har 8 mulige verdier:

| Symbolindeks | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Symbol | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_7$ |
| Kode $c_i$ | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |

- Naturlig binærkoding er bare «optimal» hvis alle verdiene i sekvensen er like sannsynlige.
  - Med «optimal» menes her at kompresjonen er «best» mulig.

# Informasjonsteori og koding

- Koding bygger på sannsynligheter.
- Forekommer én pikselverdi oftere enn en annen, bør førstnevnte lagres med mindre antall biter for å bruke minst mulig biter på å lagre hele bildet.
- Det er altså plassbesvarende å bruke flere biter på symboler som forekommer sjeldent, fordi hyppige symboler da kan bruke færre biter.

**=> Vi bør bruke et variabelt antall biter per symbol.**

- Vi skal nå først se på koding av enkeltpiksler.
- Bør allerede ha minimert annen redundans.
  - F.eks. gjennom transform-steget, som vi skal se på neste uke.

# Koder med variabel lengde

- Når symbolene forekommer med ulik sannsynlighet er det bedre å bruke **kodeord med variabel lengde**.
  - Hyppige symboler • kortere kodeord.
  - Sjeldne symboler • lengre kodeord.
  - Dette var forretningsideen til Samuel Morse;

***De vanligste symbolene i engelsk tekst er:***

***e, t, a, o, i, n, …***

Morse-kode: . og mellomrom varer 1 enhet, - varer 3 enheter

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | . - | F | . . - . | K | - . - | P | . - - . | U | . . - |
| B | - . . . | G | - - . | L | . - . . | Q | - - . - | V | . . . - |
| C | - . - . | H | . . . . | M | - - | R | . - . | W | . - - |
| D | - . . | I | . . | N | - . | S | . . . | X | - . . - |
| E | . | J | . - - - | O | - - - | T | - | Y | - . - - |

# Histogram og normalisert histogram

- Anta vi har en sekvens med N symboler.

- Tell opp antall ganger symbol $s_i$ forekommer og la $n_i$ være dette antallet.
  - Dette er det samme som histogrammet til sekvensen.

- Sannsynligheten til symbolene finnes da som:
  - $p_i = n_i / N$
  - Dette er det normaliserte histogrammet.
  - Hvis man antar at pikselverdiene er uavhengige realiseringer av en underliggende diskret variabel, så er $p_i$ et estimat av sannsynligheten for at variabelen er symbol $s_i$.

# Gjennomsnittlig antall biter per piksel

- Vi konstruerer en kodebok $c_0, \ldots, c_{G-1}$ slik at symbol $s_i$ kodes med kodeordet $c_i$.
  - G er antall symboler i alfabetet.
- $b_i$ er lengden av kodeordet $c_i$ (angitt i biter).
- Gjennomsnittlig antall biter per piksel for kodet bilde:

$$c = b_0 p_0 + b_1 p_1 + \ldots + b_{G-1} p_{G-1} = \sum_{i=0}^{G-1} b_i p_i$$

der sannsynligheten til pikselverdi $s_i$ er $p_i$

# Informasjonsinnhold

- Definer informasjonsinnholdet $I(s_i)$ i hendelsen $s_i$ ved:

$$I(s_i) = \log_2 \frac{1}{p_i}$$

- $\log_2(x)$ er 2-er-logaritmen til x.
  - Hvis $\log_2(x) = b$ så er $x = 2^b$
    - Eks: $\log_2(64) = 6$ fordi $64 = 2^6$ (= 2*2*2*2*2*2)
      $\log_2(8) = 3$ fordi $8 = 2*2*2 = 2^3$
  - $\log_2(\text{tall}) = \log_{10}(\text{tall}) / \log_{10}(2)$ ($\log_{10}(2) \approx 0.301030$ …)

- $\log_2(1/p_i)$ gir oss informasjonsinnholdet i hendelsen: «symbolet $s_i$ forekommer en gang», uttrykt i biter.

# Entropi

- Gjennomsnittlig informasjonsinnhold i sekvensen, også kalt gjennomsnittlig informasjon per symbol, er da:

$$H = \sum_{i=0}^{G-1} p_i I(s_i) = -\sum_{i=0}^{G-1} p_i \log_2 p_i$$

Hvis $p(s_i)=0$ lar vi det tilhørende entropibidraget, $0\log_2 0$, være 0.

- H er entropien til sekvensen av symbolene.

- **Entropien setter en nedre grense for hvor kompakt sekvensen kan representeres.**
  - Men dette gjelder bare hvis vi koder hvert symbol for seg.

# Øvre og nedre grense for entropi

- Hvis alle symboler like sannsynlige => entropi lik antall biter.
  - Hvis det er $G=2^b$ symboler i alfabetet, og sannsynligheten for hvert av dem er $p_i = 1/2^b$, så er entropien:

$$H = -\sum_{i=0}^{G-1} \frac{1}{2^b} \log_2\left(\frac{1}{2^b}\right) = -\log_2\left(\frac{1}{2^b}\right) = b$$

  - Altså: Hvis det er $2^b$ symboler som alle er like sannsynlige, så kan de ikke representeres mer kompakt enn med b biter per symbol
    - når vi koder symbolene enkeltvis.

- Hvis alle pikslene er like => entropi lik 0.
  - Hvis bare ett symbol forekommer, er sannsynligheten for dette symbolet lik 1, og alle andre sannsynligheter er lik 0.
    Siden $\log_2(1) = 0$ vil entropien da bli lik 0.

# Entropi i et binært bilde: To eksempler

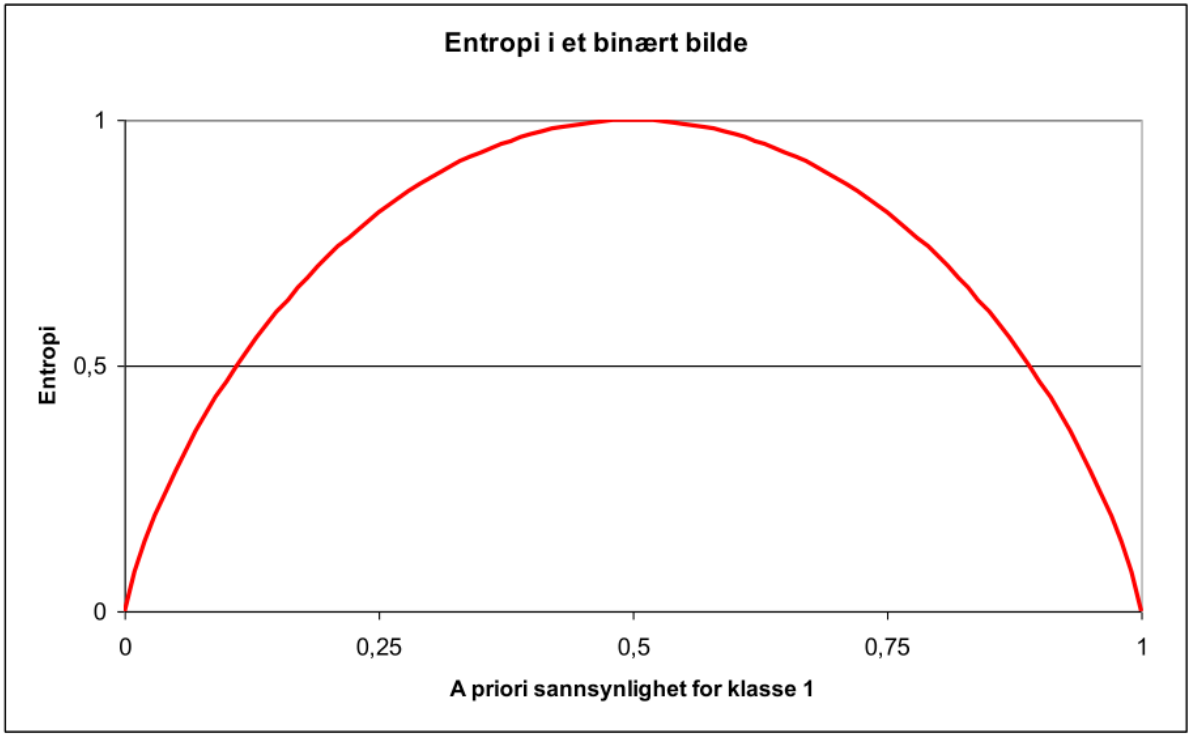
- Anta vi har et M×N binært bilde.
- Hvis vi skal lagre hver pikselverdi for seg selv, må vi alltid bruke MN biter, men hvor mye informasjon er det i bildet?
- Like mange 0 som 1 i bildet (og ingen interpiksel-redundans): Informasjonsinnholdet i hver mulig hendelse er da like stort, derfor er entropien 1 bit.

$$H = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{1/2}\right) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{1/2}\right) = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 1 = 1$$

- 3 ganger så mange 1 som 0 i bildet (og ingen interpiksel-redundans): Mindre overraskende å få en 1 og det skjer oftere. Entropien er da mindre:

$$H = \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{1/4}\right) + \frac{3}{4}\log_2\left(\frac{1}{3/4}\right) = \frac{1}{4} * 2 + \frac{3}{4} * 0,415 = 0,5 + 0,311 = 0,811$$

# Entropi i et binært bilde




- Når vi lagrer pikselverdi for pikselverdi vil vi alltid måtte bruke 1 bit per piksel i et binært bilde, selv når entropien er nær 0!
- Kodingsredundansen er null når det er like mange svarte og hvite piksler.

# Shannon-Fano-koding - I

En enkel metode:

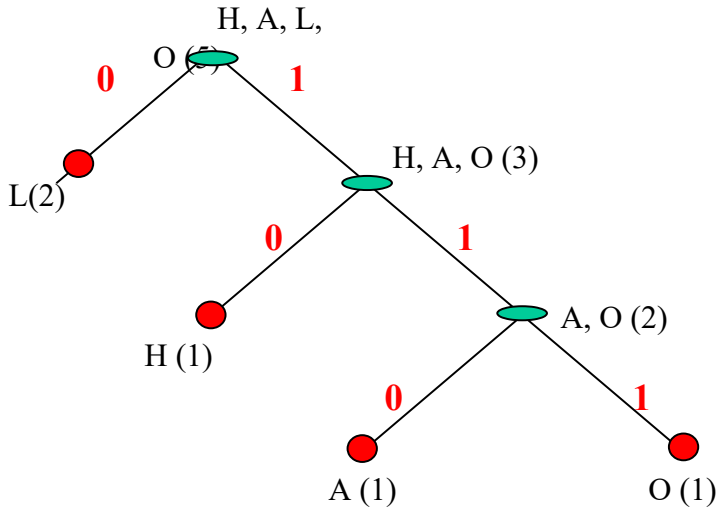
1.Sorter symbolene etter hyppighet, hyppigst til venstre.

2.Del symbolene rekursivt i to grupper som forekommer så
like hyppig som mulig.

- Oppdelingen skal skje ved at symbolene til venstre for en grense blir en subgruppe, mens resten blir en annen subgruppe.
- Venstre gruppe tilordnes 0, høyre gruppe tilordnes 1.
- Rekursjonen stopper når hver gruppe inneholder ett symbol.

3.Traverser treet fra rot til hvert blad for å finne koden for hvert symbol.

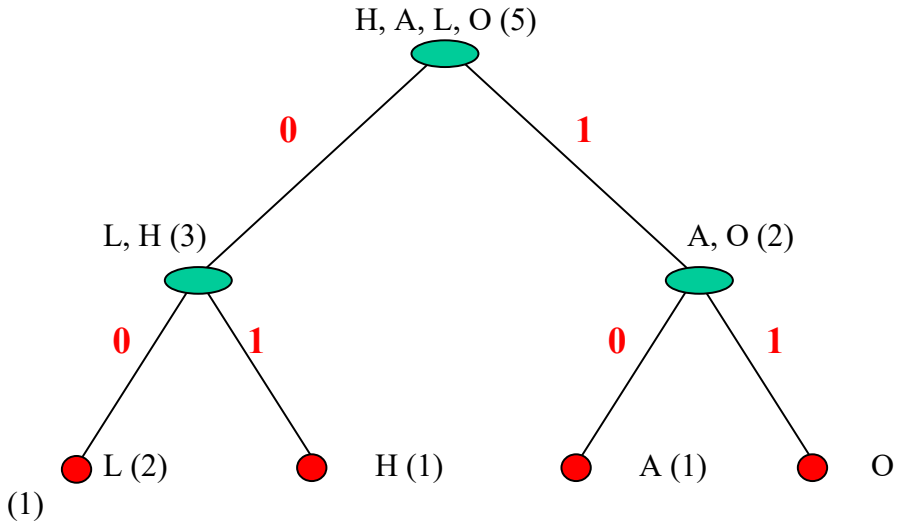
Eksempel: Koding av: HALLO




| Symbol | Ant. | Kodeord | Lengde | Antall biter |
|---|---|---|---|---|
| L | 2 | 0 | 1 | 2 |
| H | 1 | 10 | 2 | 2 |
| A | 1 | 110 | 3 | 3 |
| O | 1 | 111 | 3 | 3 |
| Totalt antall biter | | | | 10 |

# Shannon-Fano-koding - II

- Oppdeling i to «så like store grupper som mulig» kan gi et annet binærtre for eksempel: HALLO
  - Selv om treet er annerledes, og kodeboken blir forskjellig, så er koden unikt dekodbar.
  - For dette eksempelet er de to løsningene er likeverdige, men slik er det ikke alltid.




- Generelt for Shannon-Fano-koding er gjennomsnittlig antall biter per symbol relatert til entropien:

$$H \leq c \leq H+1$$

- Øvre grense for kodingsredundans:
  **1 bit per symbol**

| Symbol | Ant. | Kodeord | Lengde | Antall biter |
|---|---|---|---|---|
| L | 2 | 00 | 2 | 4 |
| H | 1 | 01 | 2 | 2 |
| A | 1 | 10 | 2 | 2 |
| O | 1 | 11 | 2 | 2 |
| Totalt antall biter | | | | 10 |

# 10 slides om Huffman-koding

- Huffman-koding er en algoritme for variabel-lengde koding som er **optimal** under begrensningen at vi **koder symbol for symbol**.
  - Med *optimal* menes her minst mulig kodings-redundans.

- Antar at vi kjenner hyppigheten for hvert symbol.
  - Enten spesifisert som en modell.
    - Huffman-koden er da optimal hvis modellen stemmer.
  - Eller så kan vi bruke symbol-histogrammet til sekvensen.
    - Huffman-koden er da optimal for sekvensen.
    - Ofte bruker vi sannsynlighetene i stedet, men vi kan like godt benytte hyppighetene.

# Huffman-koding: Algoritmen

Gitt en sekvens med N symboler:

1. Sorter symbolene etter sannsynlighet,
   slik at de minst sannsynlige kommer sist.
2. Slå sammen de to minst sannsynlige symbolene til en gruppe, og sorter igjen etter sannsynlighet.
3. Gjenta 2 til det bare er to grupper igjen.
4. Gi koden 0 til den ene gruppen
   og koden 1 til den andre.
5. Traverser innover i begge gruppene og
   legg til 0 og 1 bakerst i kodeordet
   til hver av de to undergruppene.

# Eksempel: Huffman-koding

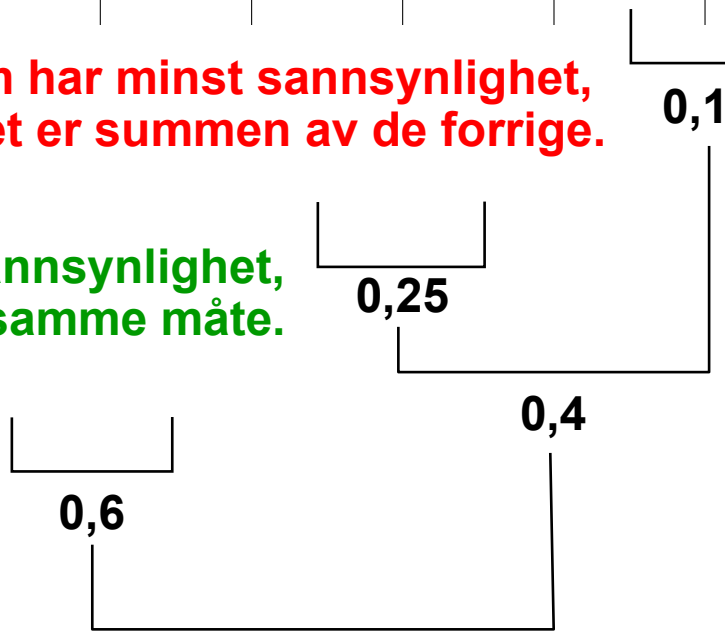
- La oss finne Huffman-koden til modellen som består av følgende seks begivenheter med sannsynligheter:

| Begivenhet | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sannsynlighet | 0,3 | 0,3 | 0,13 | 0,12 | 0,1 | 0,05 |

**Slå sammen de to gruppene som har minst sannsynlighet, Den nye gruppens sannsynlighet er summen av de forrige.**

**Finn de to som nå har minst sannsynlighet, og slå dem sammen på samme måte.**

**Fortsett til det er bare to igjen.**

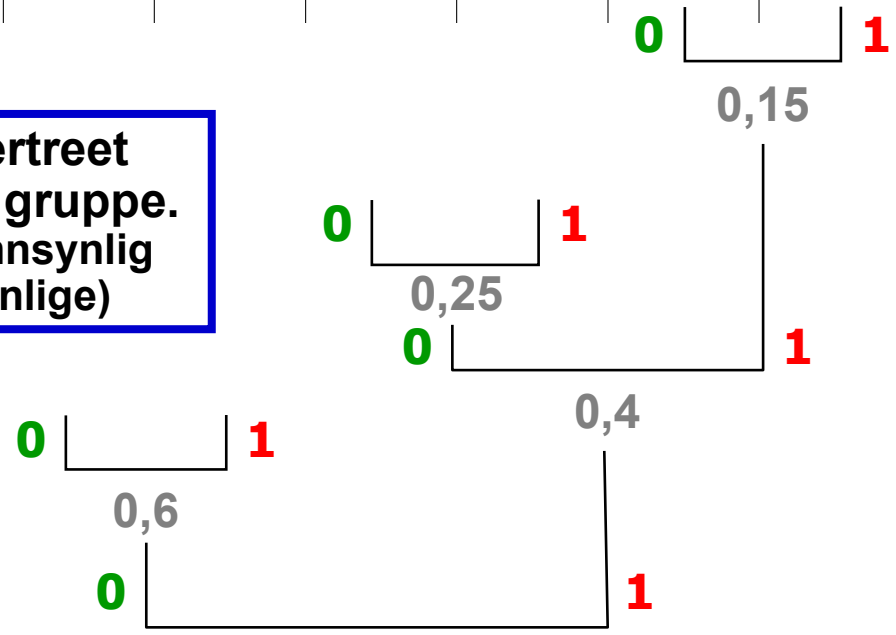


# Eksempel: Huffman-koding

- La oss finne Huffman-koden til modellen som består av følgende seks begivenheter med sannsynligheter:

| Begivenhet | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sannsynlighet | 0,3 | 0,3 | 0,13 | 0,12 | 0,1 | 0,05 |

**Gå baklengs gjennom binærtreet og tilordne 0 eller 1 til hver gruppe. (F. eks. kode 0 til den mest sannsynlig og kode 1 til den minst sannsynlige)**



# Eksempel: Huffman-koding

- Vi får dermed følgende kodebok:

| Begivenhet | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Huffman-kodeord | 00 | 01 | 100 | 101 | 110 | 111 |

- Siden sannsynlighetene er:

| Sannsynlighet | 0,3 | 0,3 | 0,13 | 0,12 | 0,1 | 0,05 |
|---|---|---|---|---|---|---|

blir gjennomsnittlig antall biter per symbol:

$$c = b_0 p_0 + b_1 p_1 + \ldots + b_{G-1} p_{G-1} = \sum_{i=0}^{G-1} b_i p_i = 0{,}6 * 2 + 0{,}4 * 3 = 2{,}4$$

- Entropien H er her litt mindre enn c:

$$H = -\sum_{i=0}^{G-1} p_i \log_2 p_i \approx 2,34$$

# Huffman-koding: Kodingsredundans

- Vi har sett at Shannon-Fano-koder har en øvre grense for kodingsredundans på 1 bit per symbol.

- Kodingsredundansen til Huffman-koder har samme øvre grense, men har også en tettere grense dersom $\mathbf{p_{max}}$ , sannsynligheten til det hyppigste symbolet, ikke er veldig stor.

$$c - H \leq p_{\max} + \log_2\left(\frac{2\log_2 e}{e}\right) \approx p_{\max} + 0,086$$

- Kodingsredundansen til Huffman-koder blir større ettersom $\mathbf{p_{max}}$ nærmer seg 1;
  Selv om $\mathbf{p_{max}}$ er mye større enn 0,5
  så må vi bruke 1 bit på å kode det tilhørende symbolet!

# Generelt om Shannon-Fano- og Huffman-koding

- **Ingen kodeord danner prefiks i en annen kode.**
  - Dette sikrer at en sekvens av kodeord kan dekodes entydig og at man IKKE trenger endemarkører / skilletegn.
  - **Mottatt kodesekvens er unikt og instantant dekodbar.**
  - Dette gjelder også naturlig binærkoding.

- **Hyppige symboler har kortere kodeord enn sjeldne symboler.**

- De to minst sannsynlige symbolene har like lange koder.
  - Bare siste bit skiller dem fra hverandre.

- **Merk: Kodeboken må overføres!**
  - Kodeboken til et b-biters bilde inneholder opptil **$G=2^b$ kodeord** og det lengste **kodeordet** kan ha **opptil G-1 biter**.

# Eksempel: Huffman-koding

- La oss Huffman-kode alfabetet som består av de seks mest sannsynlige symbolene i engelsk tekst:

| Symbol | ^ | e | t | a | o | i |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sannsynlighet | 0,34 | 0,19 | 0,14 | 0,12 | 0,11 | 0,10 |
| Huffman-kodeord | 00 | 10 | 010 | 011 | 110 | 111 |
| Kodeordlengde | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Entropi-bidrag | 0,529 | 0,455 | 0,397 | 0,367 | 0,350 | 0,332 |

- Det gjennomsnittlige antall biter per symbol, c, er gitt ved:

$$c = \sum_{i=0}^{G-1} b_i p_i = 2 \cdot 0,53 + 3 \cdot 0,47 = 2,47$$

- Entropien H er igjen litt mindre enn c: $H = -\sum_{i=0}^{G-1} p_i \log_2 p_i \approx 2,43$

- Kodingsredundansen c - H er dermed: $c - H \approx 2,47 - 2,43 = 0,04$

# Ideell og faktisk kodeord-lengde

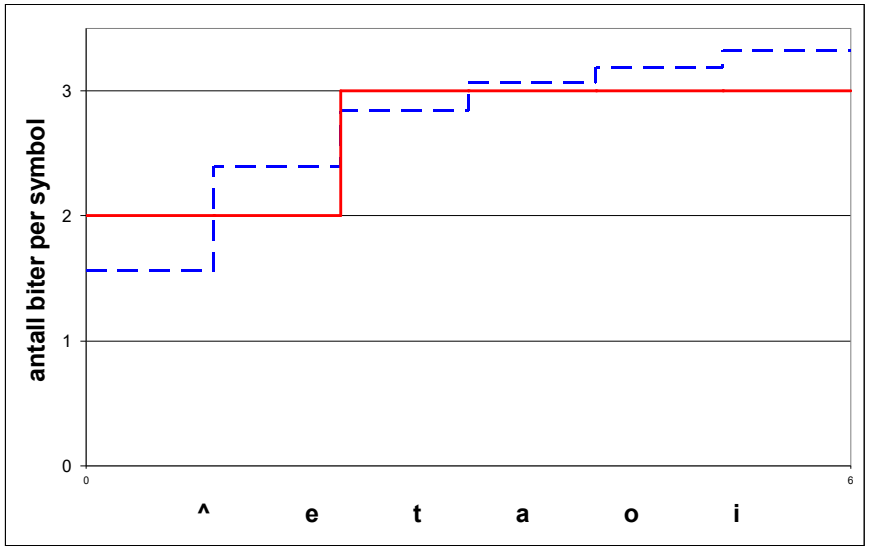
- Hvis gjennomsnittlig antall biter per symbol, c, skal være lik entropien, H, så må:

$$c = \sum_{i=0}^{G-1} b_i p_i = -\sum_{i=0}^{G-1} p_i \log_2 p_i = H$$

- Informasjonsinnholdet $I(s_i)$ i hendelsen $s_i$ angir altså den **ideelle binære kodeordlengden** for symbol $s_i$:

$$b_i = I(s_i) = \log_2 \frac{1}{p_i}$$

- Plotter den ideelle lengden på kodeordene (vist i blått) sammen med de faktiske kodeordlengden (vist i rødt) for forrige eksempel, får vi:



# Når gir Huffman-koding ingen kodingsredundans?

- Den **ideelle binære kodeordlengden** for symbol $s_i$ er:

$$b_i = -\log_2(p_i)$$

- Siden **bare heltalls kodeordlengder er mulig**,
  er det bare når $p_i = \frac{1}{2^k}$
  for et heltall k som dette kan tilfredsstilles.

- Eksempel: Hvis meldingen har sannsynlighetene:

| Symbol | $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sannsynlighet | 0,5 | 0,25 | 0,125 | 0,0625 | 0,03125 | 0,03125 |
| Huffman-kodeord | 0 | 10 | 110 | 1110 | 11110 | 11111 |

er gjennomsnittlig bitforbruk per symbol etter Huffman-koding:

$$c = 1{,}9375 = H$$

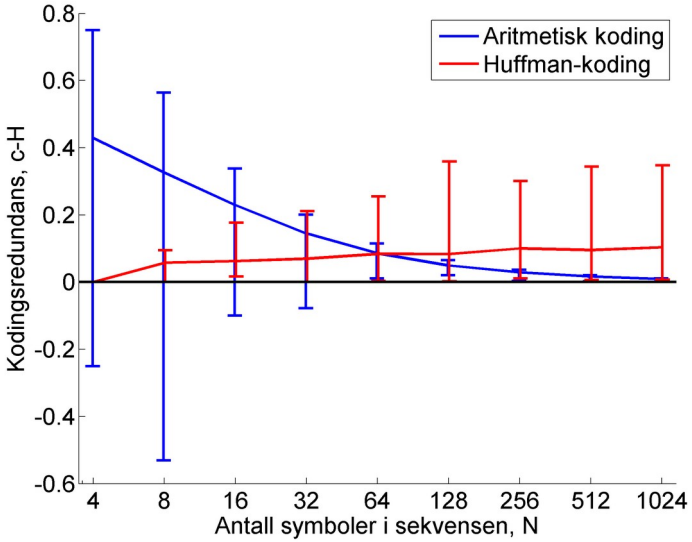
der H er entropien. Altså får vi **ingen kodingsredundans**!

# Aritmetisk koding

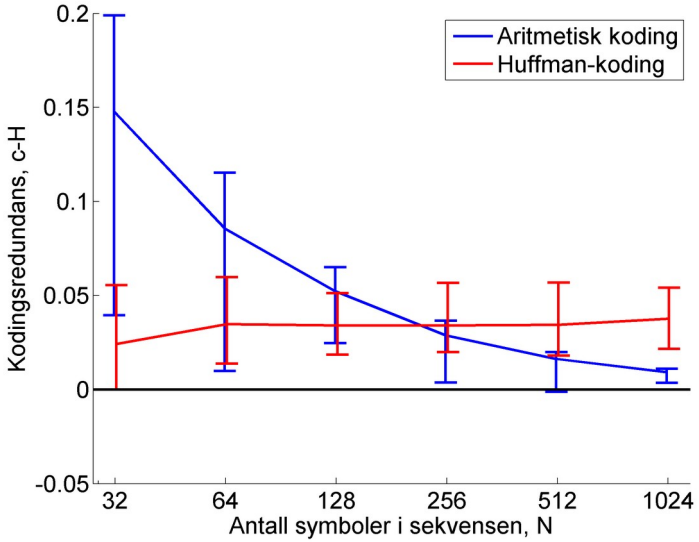
- Alternativ til Huffman-koding, som den deler flere likheter med:
  - Tapsfri kompresjonsmetode.
  - Entropikoder: Koder mer sannsynlige symboler mer kompakt.
    - Bruker sannsynlighetsmodell / histogram av symbolforekomster.
      - Huffman-koding: Sender / bruker kjent kodebok.
      - Aritmetisk koding: Sender / bruker kjent modell/histogram.
- Skiller seg fra Huffman-koding ved at **aritmetisk koding ikke lager kodeord for enkeltsymboler.**
  - I stedet kodes en sekvens av symboler som ett tall D ($0{,}0 \leq D < 1{,}0$).
  - Kan oppnå bedre kompresjon enn Huffman-koding.
  - Entropien setter ikke en nedre grense for bitforbruket.
    - Men setter faktisk fortsatt en nedre grense for gjennomsnittet!
- Resulterer i et **bitforbruk per symbol som er nær entropien**.

# Aritmetisk koding vs Huffman-koding

1. Definér antall symboler i alfabetet, G, og antall symboler i sekvensen, N.
2. Gjenta 100 ganger:
   a. Tilfeldig generer sannsynligheten for hvert symbol i alfabetet, $p_i$
   b. Tilfeldig generer det oppgitte antall symboler iht. de genererte $p_i$
   c. Hvis ikke alle symbolene i alfabetet forekommer i sekvensen, gå til 1.
   d. Beregn kodingsredundansen etter aritmetisk koding og etter Huffman-koding.
3. Beregn maksimum, gjennomsnittlig og minimum kodingsredundans.



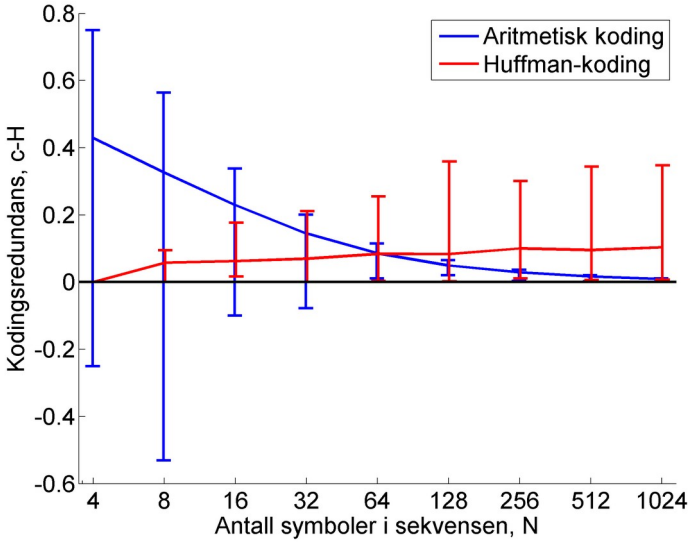

Med G=4 symboler i alfabetet.



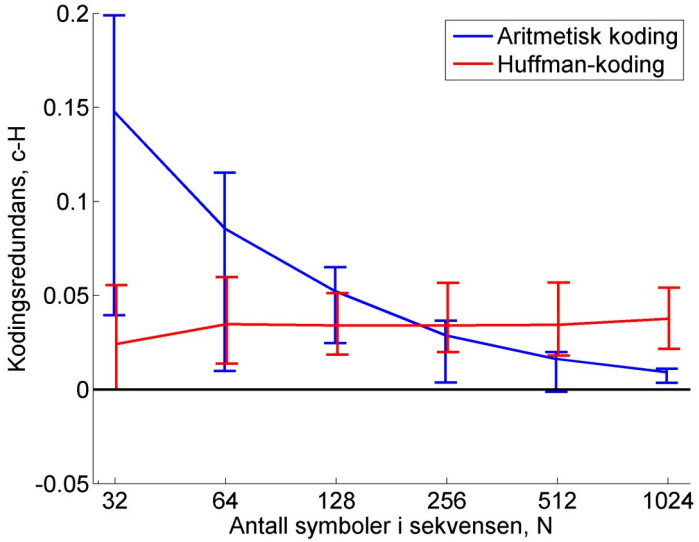

Med G=20 symboler i alfabetet.

# Aritmetisk koding vs Huffman-koding

- Aritmetisk koding: Bedre kompresjon jo lenger symbolsekvensen er.
- Huffman-koding: Bedre kompresjon jo flere symboler i alfabetet.
- Aritmetisk koding komprimerer typisk litt bedre enn Huffman-koding, men er mer regnekrevende å utføre.
  - For vanlige bilder, dvs. med relativt få symboler i alfabetet og (potensielt sett) mange symboler i sekvensen.



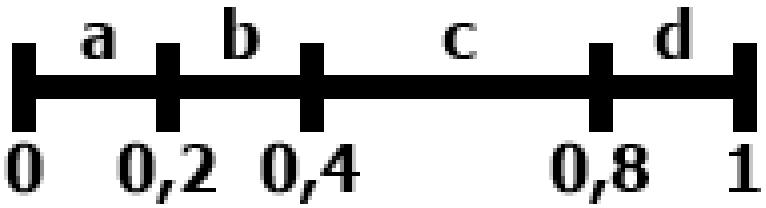

Med G=4 symboler i alfabetet.




Med G=20 symboler i alfabetet.

# Aritmetisk koding: Grunntanke

- Symbolsannsynlighetene summerer seg til 1.
- Dermed definerer de en **oppdeling av intervallet [0; 1)**.
  - Hvert delintervall representerer ett symbol.

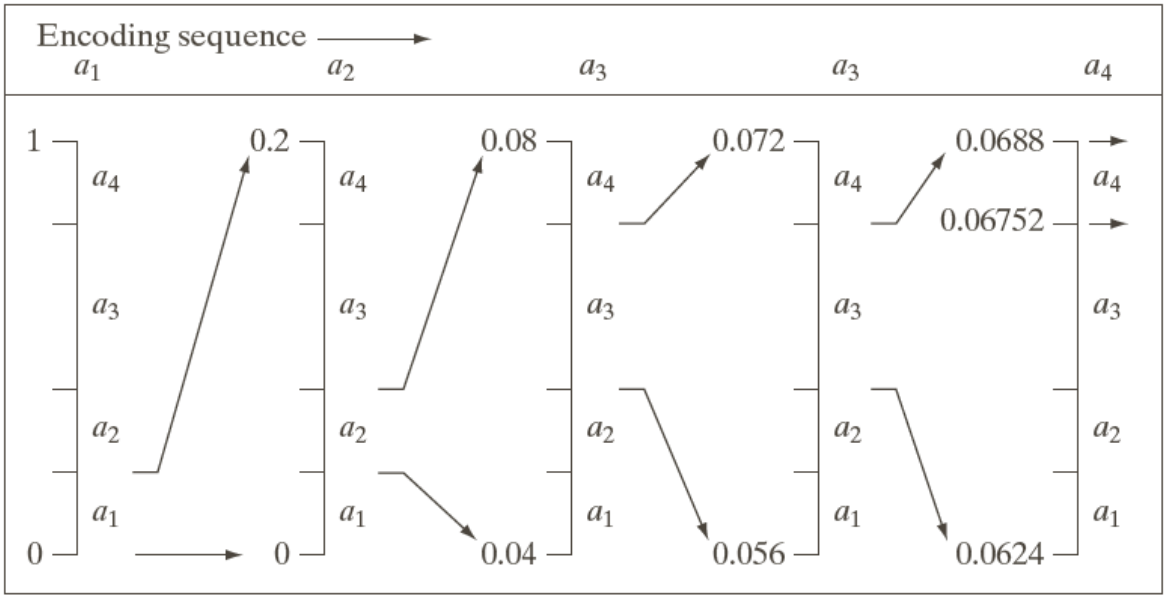



- Har vi to symboler etter hverandre, kan vi **oppdele intervallet som representerer det første symbolet**.
  - Hvert delintervall representerer symbolparet; det første symbolet etterfulgt av ett symbol.


- Tilsvarende for flere symboler etter hverandre.
- Resultat: Et halvåpent delintervall av [0; 1).
- Finner så en bitsekvens som representerer intervallet.

# Eksempel: Aritmetisk koding

- Sannsynlighetsmodell: $P(a_1)=P(a_2)=P(a_4)=0{,}2$ og $P(a_3)=0{,}4$
- Melding/symbolsekvens: $a_1a_2a_3a_3a_4$




- $a_1$ ligger i intervallet [0; 0,2)
- $a_1a_2$ ligger i intervallet [0,04; 0,08)
- $a_1a_2a_3$ ligger i intervallet [0,056; 0,072)
- $a_1a_2a_3a_3$ ligger i intervallet [0,0624; 0,0688)
- $a_1a_2a_3a_3a_4$ ligger i intervallet [0,06752; 0,0688)

# Aritmetisk koding: Algoritmen

1. La «current interval» = [0; 1).

2. For hvert symbol $a_i$ i sekvensen (fra venstre):
   a) Del opp «current interval» i delintervaller, der størrelsen på hvert delintervall er proporsjonalt med sannsynligheten for det tilhørende symbolet.
      - Proporsjonalitetsfaktoren er størrelsen av «current interval».
   b) Velg det delintervallet som svarer til $a_i$, og la «current interval» være dette delintervallet.

3. Representér «current interval» med en kortest mulig bitsekvens.

# Aritmetrisk koding i praksis

- Alfabetet inneholder normalt **END-OF-DATA (EOD)**.
  - Dette symbolet må også få en sannsynlighet i modellen.
  - Alternativt kan lengden av symbolsekvensen defineres, enten predefinert eller spesifisert.

- I praksis oppdeles ikke «current interval», **kun delintervallet til det trufne symbolet beregnes**:
  - begynnelsen av nytt c.i. =
    begynnelsen av gammelt c.i. +
    (bredden av gammelt c.i. *
    begynnelsen av symbolets intervall i modellen)
  - slutten av nytt c.i. =
    begynnelsen av gammelt c.i. +
    (bredden av gammelt c.i. *
    slutten av symbolets intervall i modellen)
- Vi beregner altså kun ett intervall for hvert symbol.

# AK: Kodingseksempel

- Modell: Alfabet [a; b; c] med sannsynligheter [0,6; 0,2; 0,2].
- Hvilket delintervall av [0; 1) vil entydig representere meldingen **acaba** ?

- **a** ligger i intervallet [0; 0,6).
  - «Current interval» har nå en bredde på 0.6.
- **ac** ligger i intervallet [0+0,6*0,8; 0+0,6*1) = [0,48; 0,6).
  - Intervallbredden er nå 0,12 (= produktet 0,6*0,2).
- **aca** ligger i intervallet [0,48+0,12*0; 0,48+0,12*0,6) = [0,48; 0,552).
  - Intervallbredden er 0,072 (= produktet 0,6*0,2*0,6).
- **acab** er i [0,48+0,072*0,6; 0,48+0,072*0,8) = [0,5232; 0,5376).
  - Intervallbredden er 0,0144 (= produktet 0,6*0,2*0,6*0,2).
- **acaba** er i [0,5232+0,0144*0; 0,5232+0,0144*0,6) = [0,5232; 0,53184).
  - Intervallbredden er nå 0,00864 (= produktet 0,6*0,2*0,6*0,2*0,6).

- Et tall i dette intervallet, f.eks. 0,53125, vil entydig representere **acaba**, forutsatt at mottakeren har den samme modellen og vet når å stoppe.

# AK: Dekodingseksempel

- ***Anta at vi skal dekode tallet 0,53125.***
- Samme modell: Alfabet [a, b, c] med sannsynligheter [0,6; 0,2; 0,2].

- La [0; 1) være «current interval».
- Del intervallet iht. modellen; a er [0; 0,6), b er [0,6; 0,8) og c er [0,8; 1).
- Tall 0,53125 ligger i delintervallet for a, [0; 0,6): **=> Første symbol: a**
- [0; 0,6) er nå «current interval». Del dette opp i henhold til modellen:
    - delintervallet for a er [0; 0,36) *bredden er 60% av [0; 0,6)*
    - delintervallet for b er [0,36; 0,48) *bredden er 20% av [0; 0,6)*
    - delintervallet for c er [0,48; 0,6) *bredden er 20% av [0; 0,6)*
- Tall 0,53125 ligger i delintervallet [0,48; 0,6): **=> Andre symbol: c**
- [0,48; 0,6] er nå «current interval». Del dette opp i henhold til modellen:
    - delintervallet for a er [0,48; 0,552)
    - delintervallet for b er [0,552; 0,576)
    - delintervallet for c er [0,576; 0,6)
- Tall 0,53125 ligger i delintervallet [0,48; 0,552): **=> Tredje symbol: a**

# AK: Dekodingseksempel

- ***Anta at vi skal dekode tallet 0,53125.***
- Samme modell: Alfabet [a; b; c] med sannsynligheter [0,6; 0,2; 0,2].

- [0,48; 0,552] er nå «current interval». Del dette opp iht. modellen:
  - delintervallet for a er [0,48; 0,5232)
  - delintervallet for b er [0,5232; 0,5376)
  - delintervallet for c er [0,5376; 0,552)
- Tall 0,53125 ligger i delintervallet [0,5232; 0,5376): **=> 4. symbol: b**
- Vi deler opp intervallet [0,5232; 0,5376) for å finne neste symbol:
  - delintervallet for a er [0,5232; 0,53184)
  - delintervallet for b er [0,53184; 0,53472)
  - delintervallet for c er [0,53472; 0,5376)
- Tall 0,53125 ligger i delintervallet [0,5232; 0,53184): **=> 5. symbol: a**

- **Vi kunne fortsatt å "dekode" symboler.**
- For å vite at vi skal stoppe her trenger vi:
  - Enten et EOD-symbol i modellen; stopp når vi dekoder dette.
  - Eller vite hvor mange symboler vi skal dekode; stopp når vi har dekodet det antallet.

# Desimaltall som bitsekvens

- Vi lagrer/sender ikke desimaltall, men en sekvens med biter.
- Spørsmålet er: Hvordan kan vi representere intervallet ved bruk av færre mulig biter?
- Først må vi å se hvordan vi representerer desimaltall binært:

- Et desimaltall D i intervallet [0; 1) kan skrives som en veiet sum av negative toerpotenser:

$$D = d_1 2^{-1} + d_2 2^{-2} + d_3 2^{-3} + \ldots + d_n 2^{-n} + \ldots$$

der hver $d_i$ er enten 0 eller 1.

- Rekken av koeffisienter $d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots$ er bitsekvensen som representerer desimaltallet D.
- Vi skriver at: $D = 0,d_1 d_2 d_3 d_4 \ldots _2$ der $_2$ indikerer at tallet er skrevet i totallsystemet.

# Desimaltall som bitsekvens

- Situasjon: Vi har et desimaltall i [0; 1)
  som vi ønsker å skrive i totallsystemet.
- Løsning: Suksessiv multiplikasjon med 2:

1. Multipliser begge sider av følgende likning med 2:
   $$\mathbf{D = d_1 2^{-1} + d_2 2^{-2} + d_3 2^{-3} + \ldots + d_n 2^{-n} + \ldots}$$
   Heltallsdelen av resultatet er da lik $c_1$ fordi:
   $$2D = d_1 + Q, \text{ der } Q = d_2 2^{-1} + d_3 2^{-2} + \ldots + d_n 2^{-(n-1)} + \ldots$$
   Hvis resten Q er 0, så er vi ferdige.
2. Multipliser resten Q med 2.
   - Heltallsdelen av produktet er neste bit og
     Q oppdateres til å være den nye resten.
3. Hvis resten Q er 0, så er vi ferdige. Ellers går vi til 2.

# Representasjon av intervall

- Spørsmålet var: Hvordan kan vi representere intervallet ved bruk av færre mulig biter?

- Eksempel: Intervallet er [0,5232, 0,53184).
  - $0{,}53125_{10}$ er (som sagt) et desimaltall i dette intervallet (og er faktisk det desimaltallet i intervallet med kortest binær-representasjon)
  - Hva er bitsekvensen som representerer dette desimaltallet?
  - **$0{,}53125_{10} = 0{,}10001_2$** siden:

    2*0,53125 = 1,0625 => $d_1$ = **1**, rest = 0,0625
    2*0,0625 = 0,125 => $d_2$ = **0**, rest = 0,125
    2*0,125 = 0,25 => $d_3$ = **0**, rest = 0,25
    2*0,25 = 0,50 => $d_4$ = **0**, rest = 0,5
    2*0,5 = 1,0 => $d_5$ = **1**, rest = 0
  - Vi trenger altså bare 5 biter for å kode (et tall i) intervallet!
- Men hvordan kan vi finne hvilket desimaltall vi skal bruke slik at binær-representasjoner blir kortest mulig?

# Eksempel: Representasjon av intervall

Finn kortest mulig $d=0,d_1d_2d_3\ldots_2$ innenfor intervallet [0,6; 0,7).

- Hvis n ≥ k så er:

$$2^{-k+1} = 2^{-(k-1)} > d_k2^{-k} + \ldots + d_n2^{-n}$$

siden $d_i$ er 0 eller 1.

- Derfor er:

D = 0,**1**$\ldots_2$ => 0,5 ≤ D < 1

D = 0,**10**$\ldots_2$ => 0,5 ≤ D < 0,75

D = 0,**100**$\ldots_2$ => 0,5 ≤ D < 0,625

D = 0,**101**$\ldots_2$ => 0,625 ≤ D < 0,75

- => Intervall kan kodes ved det binære kommatallet $0,\mathbf{101}_2$ (ekvivalent med $0,625_{10}$), altså med bare 3 biter.
  - Hvis vi vil kreve at øvre og nedre grense er innenfor intervallet; kan intervallet kodes ved $0,1010_2$ fordi:

    D = 0,**1010**$\ldots_2$ => 0,625 ≤ D < 0,6875

# AK: Problemer og løsninger

1. Den stadige krympingen av «current interval» krever flyttall med stadig økende presisjon og eksakt aritmetikk.
   - Lengre symbolsekvenser krever bedre presisjon.

2. Kompresjonsmetoden gir ingen output før hele sekvensen er behandlet.

•Løsning: **Send/lagre den mest signifikante biten** når entydig kjent, og doble lengden av «c.i.».
   - Bitsekvensen blir (i teorien) lik som før.
   - Kan i praksis øke presisjonen, men løser ikke problemet.

•Det finnes flere praktiske AK-implementasjoner.
   - Alle er ganske regnetunge.
     - Vi trenger uansett presis/nøyaktig flyttallsaritmetikk!
   - De aller fleste er belagt med patenter.

# Oppsummering

- Vi komprimerer for å redusere antall bits.
- Ved kompresjon fjernes/reduseres redundans:
  - Psykovisuell -, interbilde-, intersampel-, koding-redundans.
  - Kun når vi fjerner irrelevant informasjon for anvendelsen (f.eks. psykovisuell redundans) er kompresjonen ikke-tapsfri.
- Kompresjon kan deles inn i tre steg:
  1. Transform.
  2. Kvantifisering. Hvis brukt, så blir kompresjonen ikke-tapsfri!
  3. Koding, f.eks. Shannon-Fano-, Huffman- eller aritmetisk koding.
     - Huffman-koding oppnår minst mulig kodingsredundans under antagelsen om at vi koder symbol for symbol, men aritmetisk koding kan ofte være litt bedre for vanlige bilder.