IN2080

Eksamen

Vår 2019

Oppgave 1

Den nondeterministiske endelige automaten A er gitt ved $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ der

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ er mengden av tilstander
- $\Sigma = \{a, b\}$ er inputalfabetet
- q_0 er starttilstanden
- $F = \{q_2\}$ er mengden av aksepterende tilstander

og δ gitt ved

$$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\},\ \delta(q_1, b) = \{q_2\},\ \delta(q_0, b) = \delta(q_1, a) = \delta(q_2, a) = \delta(q_2, b) = \emptyset$$

er transisjonsfunksjonen. Språket som gjenkjennes av denne automaten kalles $L(A)$.

(a) Tegn automaten A.

(b) Tegn en deterministisk endelig automat som gjenkjenner $L(A)$.

(c) Gi et regulært uttrykk for $L(A)$.

Oppgave 2

Den kontekstfrie grammatikken G er gitt ved reglene

$$S \to \varepsilon,\ S \to SS,\ S \to (S).$$

Startvariabelen S er grammatikkens eneste variabel, og grammatikken har to terminaler:) og (.

(a) Gi en utledning av strengen (())() i grammatikken G.

(b) Tegn en pushdown-automat som gjenkjenner språket som genereres av G.

(c) Gi en kontekstfri grammatikk som genererer språket $\{a^n b^n \mid n \geq 2\}$.

Oppgave 3

La Σ være alfabetet $\{a, b, \#\}$, og la $x, y \in \Sigma^*$. La $x \sqsubseteq y$ bety at x er en substreng av y (dvs. at det finnes $z_1, z_2 \in \Sigma^*$ slik at $z_1 x z_2 = y$), og la x^R betegne strengen x reversert (så vi har f.eks. $(aaab)^R = baaa$ og $a^R = a$). Språkene $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ er gitt ved

- $L_1 = \{ \ bb\#y \ \mid \ y \in \{a, b\}^* \text{ og } bb \sqsubseteq y \ \}$
- $L_2 = \{ \ x\#y \ \mid \ x, y \in \{a, b\}^* \text{ og } x \sqsubseteq y \ \}$
- $L_3 = \{ \ x\#y \ \mid \ x, y \in \{a, b\}^* \text{ og } x^R \sqsubseteq y \ \}$.

Pumpelemmaet for regulære språk: Hvis A er et regulært språk finnes det et tall p slik at for enhver streng s i A av lengde minst p, kan s deles opp i tre deler $s = xyz$, slik at følgende betingelser er oppfylt:

1. For alle $i \geq 0$ er $xy^i z \in A$,
2. $|y| > 0$ og
3. $|xy| \leq p$.

Pumpelemmaet for kontekstfrie språk: Hvis A er et kontekstfritt språk finnes det et tall p slik at for enhver streng s i A av lengde minst p, kan s deles opp i fem deler $s = uvxyz$, slik at følgende betingelser er oppfylt:

1. For alle $i \geq 0$ er $uv^i xy^i z \in A$,
2. $|vy| > 0$ og
3. $|vxy| \leq p$.

(a) Ett, og bare ett, av de tre språkene L_1, L_2 og L_3 er regulært. Identifiser dette språket, og vis at det er regulært.

(b) Ett, og bare ett, av de tre språkene L_1, L_2 og L_3 er kontekstfritt, men ikke regulært. Identifiser dette språket, vis at det er kontekstfritt og vis at det ikke er regulært.

(c) Ett, og bare ett, av de tre språkene L_1, L_2 og L_3 er ikke kontekstfritt. Identifiser dette språket, og vis at det ikke er kontekstfritt.

Oppgave 4

Under følger 20 påstander, hver enkelt skal markeres som sann eller usann.

I de følgende påstander betegner A og B vilkårlige språk over et alfabet Σ. Språket $\overline{A}$ er komplementet til A, dvs. $\overline{A} = \Sigma^* \backslash A$. Videre betyr $A \subseteq B$ at A er en delmengde av B, og $A \leq_m B$ betyr at A er mappingreduserbart til B. Språket PCP inneholder alle instanser av Posts korrespondanseproblem som har en løsning. Vi har oversatt lærebokas "Turing-decidable" og "Turing-recognizable" til henholdsvis "Turing-avgjørbar" og "Turing-gjenkjennbar".

1. Hvis A er Turing-gjenkjennbart, så er A Turing-avgjørbart.
2. Hvis A er Turing-avgjørbart, så er A Turing-gjenkjennbart.
3. Hvis A ikke er Turing-gjenkjennbart, så er A ikke Turing-avgjørbart.
4. A er Turing-avgjørbart hvis og bare hvis både A og $\overline{A}$ er Turing-gjenkjennbare.
5. A er Turing-avgjørbart hvis og bare hvis både A og $\overline{A}$ er Turing-avgjørbare.
6. Hvis A er Turing-gjenkjennbart, så er $\overline{A}$ Turing-gjenkjennbart.
7. Hvis $A \subseteq B$ og A er Turing-avgjørbart, så er B Turing-avgjørbart.
8. Hvis $A \subseteq B$ og B er Turing-avgjørbart, så er A Turing-avgjørbart.
9. Hvis $A \subseteq B$ og B er Turing-gjenkjennbart, så er A Turing-gjenkjennbart.
10. Hvis A er endelig, så er både A og $\overline{A}$ Turing-avgjørbare.
11. Hvis A er endelig, så er både A og $\overline{A}$ Turing-gjenkjennbare.
12. Hvis $A \leq_m B$ og B ikke er Turing-gjenkjennbart, så er ikke A Turing-gjenkjennbart.
13. Hvis $A \leq_m B$ og B er Turing-gjenkjennbart, så er A Turing-gjenkjennbart.
14. Hvis $A \leq_m B$ og A ikke er Turing-gjenkjennbart, så er ikke B Turing-gjenkjennbart.

15. PCP er Turing-avgjørbart.

16. PCP er Turing-gjenkjennbart.

17. Hvis A er Turing-gjenkjennbart, så $A \leq_m PCP$.

18. Hvis $A \leq_m PCP$, så er A er Turing-gjenkjennbart.

19. La $B \neq \emptyset$ og $B \neq \Sigma^*$. Hvis $A \leq_m B$ og $B \leq_m A$, så $\overline{A} \leq_m PCP$.

20. $\overline{PCP} \leq_m PCP$.

Oppgave 5

(a) Forklar hva det betyr at et språk L_1 er polynom-tid reduserbart til et språk L_2. Svar kort. Det holder å gi definisjonen fra læreboka.

(b) Forklar hva det betyr at et språk L er NP-komplett. Svar kort. Det holder å gi definisjonen fra læreboka.

(c) Beskriv et kjent NP-komplett språk, f.eks. SAT eller $HAMPATH$. Svar kort.

Oppgave 6

Språket *SUBSET-SUM* er mengden

$$\{\langle S, t\rangle \mid S \subseteq \mathbb{N}, t \in \mathbb{N} \text{ og det finnes } x_1, \ldots, x_k \in S \text{ slik at } \sum_{i=1}^{k} x_i = t\}$$

Språket *SUBSET-SUM*, som er kjent fra læreboken og tidligere eksamener i INF2080, er NP-komplett. Vi skal se på en variant av *SUBSET-SUM* som vi skal kalle *TRIPPEL-SUBSET-SUM*.

La $S \subseteq \mathbb{N}$ og $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{N}$. Vi sier at S *gir summene* t_1, t_2, t_3 når det finnes $u_1, \ldots, u_j \in S$, $v_1, \ldots, v_k \in S$ og $w_1, \ldots, w_l \in S$ slik at

- $\sum_{i=1}^{j} u_i = t_1$, $\sum_{i=1}^{k} v_i = t_2$ og $\sum_{i=1}^{l} w_i = t_3$ og
- mengdene $\{u_1, \ldots, u_j\}$, $\{v_1, \ldots, v_k\}$, $\{w_1, \ldots, w_l\}$ er disjunkte, dvs., et tall kan forekomme i maksimalt én av de tre mengdene.

Språket *TRIPPEL-SUBSET-SUM* er mengden

$$\{\langle S, t_1, t_2, t_3\rangle \mid S \text{ gir summene } t_1, t_2, t_3\}.$$

Vis at *SUBSET-SUM* $\leq_P$ *TRIPPEL-SUBSET-SUM*. Du skal beskrive en polynom-tid beregnbar reduksjon f og vise at

$$\langle S, t\rangle \in \mathit{SUBSET\text{-}SUM} \iff f(\langle S, t\rangle) \in \mathit{TRIPPEL\text{-}SUBSET\text{-}SUM}.$$

Oppgave 7

Ved å bruke følgende fakta

1. Problemet *TQBF* er PSPACE-komplett,
2. Problemet *TQBF* kan løses i $SPACE(n)$ og
3. For alle k er $SPACE(n^k) \subsetneq SPACE(n^{k+1})$;

vis at $P \neq SPACE(n)$.