IN2080

Eksamen

Vår 2019

Oppgave 1

Den nondeterministiske endelige automaten A er gitt ved $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ der

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ er mengden av tilstander
- $\Sigma = \{a, b\}$ er inputalfabetet
- q_0 er starttilstanden
- $F = \{q_2\}$ er mengden av aksepterende tilstander

og δ gitt ved

$\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\},\ \delta(q_1, b) = \{q_2\},\ \delta(q_0, b) = \delta(q_1, a) = \delta(q_2, a) = \delta(q_2, b) = \emptyset$

er transisjonsfunksjonen. Språket som gjenkjennes av denne automaten kalles $L(A)$.

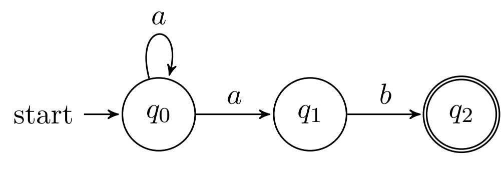
(a) Tegn automaten A.

(b) Tegn en deterministisk endelig automat som gjenkjenner $L(A)$.

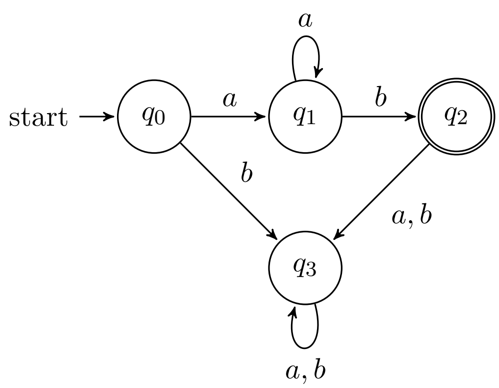
(c) Gi et regulært uttrykk for $L(A)$.

Løsningsforslag:

(a) Automaten A



(b) En DFA som gjenkjenner $L(A)$



(c) a^*ab

Oppgave 2

Den kontekstfrie grammatikken G er gitt ved reglene

$$S \to \varepsilon,\ S \to SS,\ S \to (S).$$

Startvariabelen S er grammatikkens eneste variabel, og grammatikken har to terminaler:) og (.

(a) Gi en utledning av strengen (())() i grammatikken G.

(b) Tegn en pushdown-automat som gjenkjenner språket som genereres av G.

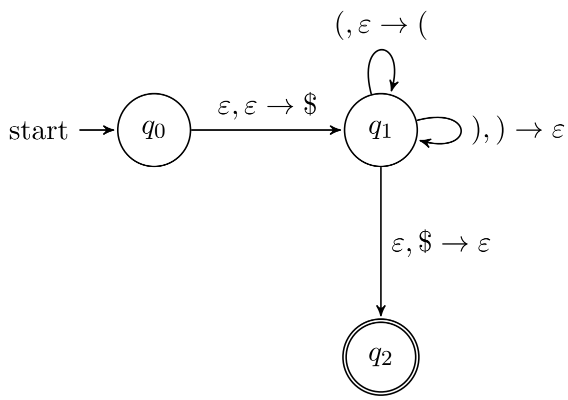
(c) Gi en kontekstfri grammatikk som genererer språket $\{a^n b^n \mid n \geq 2\}$.

Løsningsforslag:

(a) Dette er en utledning av (())():

$$S \to SS \to (S)S \to ((S))S \to (())S \to (())(S) \to (())()$$

(b) En PDA som gjenkjenner språket



(c) Følgende grammatikk genererer $\{a^n b^n \mid n \geq 2\}$:

$$S \to aSB \mid aabb$$

Oppgave 3

La Σ være alfabetet $\{a, b, \#\}$, og la $x, y \in \Sigma^*$. La $x \sqsubseteq y$ bety at x er en substreng av y (dvs. at det finnes $z_1, z_2 \in \Sigma^*$ slik at $z_1 x z_2 = y$), og la x^R betegne strengen x reversert (så vi har f.eks. $(aaab)^R = baaa$ og $a^R = a$). Språkene $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ er gitt ved

- $L_1 \; = \; \{ \; bb\#y \;\mid\; y \in \{a,b\}^* \text{ og } bb \sqsubseteq y \; \}$
- $L_2 \; = \; \{ \; x\#y \;\mid\; x, y \in \{a,b\}^* \text{ og } x \sqsubseteq y \; \}$
- $L_3 \; = \; \{ \; x\#y \;\mid\; x, y \in \{a,b\}^* \text{ og } x^R \sqsubseteq y \; \}$.

Pumpelemmaet for regulære språk: Hvis A er et regulært språk finnes det et tall p slik at for enhver streng s i A av lengde minst p, kan s deles opp i tre deler $s = xyz$, slik at følgende betingelser er oppfylt:

1. For alle $i \geq 0$ er $xy^i z \in A$,
2. $|y| > 0$ og
3. $|xy| \leq p$.

Pumpelemmaet for kontekstfrie språk: Hvis A er et kontekstfritt språk finnes det et tall p slik at for enhver streng s i A av lengde minst p, kan s deles opp i fem deler $s = uvxyz$, slik at følgende betingelser er oppfylt:

1. For alle $i \geq 0$ er $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$ og
3. $|vxy| \leq p$.

(a) Ett, og bare ett, av de tre språkene L_1, L_2 og L_3 er regulært. Identifiser dette språket, og vis at det er regulært.

(b) Ett, og bare ett, av de tre språkene L_1, L_2 og L_3 er kontekstfritt, men ikke regulært. Identifiser dette språket, vis at det er kontekstfritt og vis at det ikke er regulært.

(c) Ett, og bare ett, av de tre språkene L_1, L_2 og L_3 er ikke kontekstfritt. Identifiser dette språket, og vis at det ikke er kontekstfritt.

Løsningsforslag:

(a) L_1 er regulært siden $L_1 = bb\#(a \cup b)^*bb(a \cup b)^*$.

(b) L_3 er kontekstfritt siden følgende grammatikk genererer L_3:

$$\begin{aligned}
S &\to TU \\
T &\to aTa \mid bTb \mid \#U \\
U &\to aU \mid bU \mid \varepsilon
\end{aligned}$$

Anta at L_3 er regulært. Per pumpelemmaet for regulære språk finnes det en pumpelengde p. La $s = a^p\#a^p$. Per pumpelemmaet finnes det en inndeling $s = xyz$. Per krav 3 i pumpelemmaet må y inneholde minst en a, så er $xy^2z = a^{p+n}\#a^p$ for et positivt tall n, som ikke er i L_3. Dette er en motsigelse mot pumpelemmaet, så L_3 er ikke regulært.

(c) Anta at L_2 er kontekstfritt. Per pumpelemmaet for kontekstfrie språk finnes det en pumpelengde p. La $s = a^pb^p\#a^pb^p$. Per pumpelemmaet finnes det en inndeling $s = uvxyz$. Hvis enten v eller y inneholder $\#$, vil pumping opp føre til at strengen inneholder to $\#$, som ikke er i språket. Hvis både v og y er på samme side av $\#$ vil man ved pumping få at venstre side har flere symboler enn høyre side, og dermed vil ikke den pumpede strengen være i språket. Per krav 3 i pumpelemmaet må v bestå av n b'er og ingen a'er, og y må bestå av m a'er og ingen b'er. Hvis $n > 0$ får man mer enn p b'er på venstre side når man pumper opp, og hvis $m > 0$ får man færre enn p a'er på høyre side når man pumper ned, så i alle tilfeller vil man kunne pumpe slik at venstre side av $\#$ ikke er en delstreng av høyre side. Dette språket kan altså ikke pumpes, så L_2 er ikke kontekstfritt.

Oppgave 4

Under følger 20 påstander, hver enkelt skal markeres som sann eller usann.

I de følgende påstander betegner A og B vilkårlige språk over et alfabet Σ. Språket $\overline{A}$ er komplementet til A, dvs. $\overline{A} = \Sigma^* \backslash A$. Videre betyr $A \subseteq B$ at A er en delmengde av B, og $A \leq_m B$ betyr at A er mappingreduserbart til B. Språket PCP inneholder alle instanser av Posts korrespondanseproblem som har en løsning. Vi har oversatt lærebokas "Turing-decidable" og "Turing-recognizable" til henholdsvis "Turing-avgjørbar" og "Turing-gjenkjennbar".

1. Hvis A er Turing-gjenkjennbart, så er A Turing-avgjørbart. **USANT**
2. Hvis A er Turing-avgjørbart, så er A Turing-gjenkjennbart. **SANT**
3. Hvis A ikke er Turing-gjenkjennbart, så er A ikke Turing-avgjørbart. **SANT**
4. A er Turing-avgjørbart hvis og bare hvis både A og $\overline{A}$ er Turing-gjenkjennbare. **SANT**
5. A er Turing-avgjørbart hvis og bare hvis både A og $\overline{A}$ er Turing-avgjørbare. **SANT**
6. Hvis A er Turing-gjenkjennbart, så er $\overline{A}$ Turing-gjenkjennbart. **USANT**
7. Hvis $A \subseteq B$ og A er Turing-avgjørbart, så er B Turing-avgjørbart. **USANT**
8. Hvis $A \subseteq B$ og B er Turing-avgjørbart, så er A Turing-avgjørbart. **USANT**
9. Hvis $A \subseteq B$ og B er Turing-gjenkjennbart, så er A Turing-gjenkjennbart. **USANT**
10. Hvis A er endelig, så er både A og $\overline{A}$ Turing-avgjørbare. **SANT**
11. Hvis A er endelig, så er både A og $\overline{A}$ Turing-gjenkjennbare. **SANT**
12. Hvis $A \leq_m B$ og B ikke er Turing-gjenkjennbart, så er ikke A Turing-gjenkjennbart. **USANT**
13. Hvis $A \leq_m B$ og B er Turing-gjenkjennbart, så er A Turing-gjenkjennbart. **SANT**

14. Hvis $A \leq_m B$ og A ikke er Turing-gjenkjennbart, så er ikke B Turing-gjenkjennbart. **SANT**

15. PCP er Turing-avgjørbart. **USANT**

16. PCP er Turing-gjenkjennbart. **SANT**

17. Hvis A er Turing-gjenkjennbart, så $A \leq_m PCP$. **SANT**

18. Hvis $A \leq_m PCP$, så er A er Turing-gjenkjennbart. **SANT**

19. La $B \neq \emptyset$ og $B \neq \Sigma^*$. Hvis $A \leq_m B$ og $B \leq_m A$, så $\overline{A} \leq_m PCP$. **USANT**

20. $\overline{PCP} \leq_m PCP$. **USANT**

Oppgave 5

(a) Forklar hva det betyr at et språk L_1 er polynom-tid reduserbart til et språk L_2. Svar kort. Det holder å gi definisjonen fra læreboka.

(b) Forklar hva det betyr at et språk L er NP-komplett. Svar kort. Det holder å gi definisjonen fra læreboka.

(c) Beskriv et kjent NP-komplett språk, f.eks. SAT eller $HAMPATH$. Svar kort.

Løsningsforslag:

(a) L_1 er polynom-tid reduserbart til et språk L_2 hvis det finnes en polynom-tid beregnbar funksjon f slik at $w \in L_1 \iff f(w) \in L_2$.

(b) Et språk L er NP-komplett hvis L er i NP og for alle språk A i NP er A polynom-tid reduserbart til L.

(c) SAT er problemet å avgjøre om en utsagnslogisk formel er tilfredsstillbar. Formelt er SAT mengden av tilfredsstillbare utsagnslogiske formler.

Oppgave 6

Språket *SUBSET-SUM* er mengden

$$\{\langle S, t\rangle \mid S \subseteq \mathbb{N}, t \in \mathbb{N} \text{ og det finnes } x_1, \ldots, x_k \in S \text{ slik at } \sum_{i=1}^{k} x_i = t\}$$

Språket *SUBSET-SUM*, som er kjent fra læreboken og tidligere eksamener i INF2080, er NP-komplett. Vi skal se på en variant av *SUBSET-SUM* som vi skal kalle *TRIPPEL-SUBSET-SUM*.

La $S \subseteq \mathbb{N}$ og $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{N}$. Vi sier at S *gir summene* t_1, t_2, t_3 når det finnes $u_1, \ldots, u_j \in S$, $v_1, \ldots, v_k \in S$ og $w_1, \ldots, w_l \in S$ slik at

- $\sum_{i=1}^{j} u_i = t_1$, $\sum_{i=1}^{k} v_i = t_2$ og $\sum_{i=1}^{l} w_i = t_3$ og
- mengdene $\{u_1, \ldots, u_j\}$, $\{v_1, \ldots, v_k\}$, $\{w_1, \ldots, w_l\}$ er disjunkte, dvs., et tall kan forekomme i maksimalt én av de tre mengdene.

Språket *TRIPPEL-SUBSET-SUM* er mengden

$$\{\langle S, t_1, t_2, t_3\rangle \mid S \text{ gir summene } t_1, t_2, t_3\}.$$

Vis at *SUBSET-SUM* $\leq_P$ *TRIPPEL-SUBSET-SUM*. Du skal beskrive en polynom-tid beregnbar reduksjon f og vise at

$$\langle S, t\rangle \in \mathit{SUBSET\text{-}SUM} \iff f(\langle S, t\rangle) \in \mathit{TRIPPEL\text{-}SUBSET\text{-}SUM}.$$

Løsningsforslag:

For en mengde S, la $\Sigma(S)$ betegne summen av alle elementene i S. $\Sigma(S)$ kan åpenbart beregnes i polynom-tid. På input $\langle S, t\rangle$ beregnes først $t_2 = \Sigma(S) + 1$ og $t_3 = 2\Sigma(S) + 2$, og f produserer $\langle S \cup \{t_2, t_3\}, t, t_2, t_3\rangle$. Siden $\Sigma(S)$ kan beregnes i polynom-tid, kan f også beregnes i polynom-tid.

Vi viser nå at f faktisk er en reduksjon. Anta at $\langle S, t\rangle \in \mathit{SUBSET\text{-}SUM}$. Da finnes en delmengde S_1 av S slik at $\Sigma(S_1) = t$. Da er mengdene $S_1, \{t_2\}, \{t_3\}$ disjunkte delmengder av $S \cup \{t_2, t_3\}$ som summerer til henholdsvis t, t_2 og t_3, som viser at $f(\langle S, t\rangle) \in \mathit{TRIPPEL\text{-}SUBSET\text{-}SUM}$.

Anta så at $f(\langle S, t\rangle) \in \mathit{TRIPPEL\text{-}SUBSET\text{-}SUM}$. Da finnes det en delmengde av $S \cup \{t_2, t_3\}$ som summerer til t_3. Siden $\Sigma(S \cup \{t_2\}) = 2\Sigma(S) + 1 < 2\Sigma(S) + 2 = t_3$, må mengden som summerer til t_3 være $\{t_3\}$. Tilsvarende må mengden som summerer til t_2 være $\{t_2\}$. På grunn av kravet om at mengdene skal være disjunkte, må det være en delmengde S_1 av S som summerer til t, men dermed er $\langle S, t\rangle \in \mathit{SUBSET\text{-}SUM}$, som viser at f er en reduksjon.

Oppgave 7

Ved å bruke følgende fakta

1. Problemet $TQBF$ er PSPACE-komplett,
2. Problemet $TQBF$ kan løses i $SPACE(n)$ og
3. For alle k er $SPACE(n^k) \subsetneq SPACE(n^{k+1})$;

vis at $P \neq SPACE(n)$.
Løsningsforslag:

Anta at $P = SPACE(n)$. Per fakta 2 kan $TQBF$ løses i P. Per fakta 1 er da $P = PSPACE$. Dermed er $SPACE(n) = PSPACE$, men per fakta 3 er $SPACE(n) \subsetneq SPACE(n^2) \subseteq PSPACE = SPACE(n)$, som er en motsigelse. Altså er $P \neq SPACE(n)$.