UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF2080 — Logikk og beregninger
Eksamensdag:	1. juni 2015
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Gjør dine egne forutsetninger dersom du er i tvil om hvordan oppgaveteksten skal tolkes.

DEL I (Automater, språk og beregnbarhetsteori)

Oppgave 1

La $\Sigma = \{a, b\}$ være alfabetet.

1a

Lag en endelig automat (DFA eller NFA) som avgjør

1. ab^*
2. $\{w \mid w \text{ inneholder minst to forekomster av } b\}$

1b

Lag et regulært uttrykk som definerer

$$\{w \mid w \text{ inneholder minst to forekomster av } b\}$$

Oppgave 2

RE regulære uttrykk

DFA deterministisk endelig automat

NFA ikke-deterministisk endelig automat

GNFA generalisert NFA

PDA pushdown automat

CFG konstekstfri grammatikk

TM Turingmaskin

NTM ikke-deterministisk Turingmaskin

MTTM multitape Turingmaskin

(Fortsettes på side 2.)

2a

Hvilke av beregningsmodellene listet over assosieres med

1. kontektsfrie språk
2. regulære språk
3. Turing-beregnbare språk

2b

Sorter de tre språkkategoriene fra oppgave 2a etter uttrykkningskraft.

Oppgave 3

En konjunksjon er en formel på formen $(l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_k)$, der $k \geq 1$ og l_i er enten en variabel x eller dens negasjon $\neg x$. I de følgende oppgavene antar vi at vi kun bruker variablene x, y, z.

3a

Lag en DFA for språket $L_C = \{\varphi \mid \varphi \text{ er en konjunksjon}\}$ over alfabetet $\Sigma = \{x, y, z, (,), \neg, \wedge\}$.

3b

Vis at språket bestående av alle formler på disjunktiv normalform er regulært ved å lage et regulært uttrykk for

$$\mathcal{L}_{DNF} = \{\varphi_1 \vee \varphi_2 \vee \ldots \vee \varphi_n \mid n \geq 1 \text{ og hver } \varphi_i \text{ er en konjunksjon}\}.$$

Oppgave 4

4a

Vis at språket $\mathcal{L}_1 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \geq 0\}$ er kontekstfritt ved å lage en CFG.

4b

Lag en PDA som avjgør $\mathcal{L}_2 = \{a^k b^n c^n \mid n, k \geq 0\}$.

Oppgave 5

Pumpelemma for kontekstfrie språk. Hvis A er et kontekstfritt språk, så finnes det et tall p (pumpelengden), slik at hvis $s \in A$ og $|s| \leq p$, så kan s deles inn i fem deler $s = uvxyz$, slik at

1. for alle $i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in A$,
2. $|vy| > 0$, og
3. $|vxy| \leq p$.

(Fortsettes på side 3.)

5a

Bruk pumpelemmaet til å vise at språket $\mathcal{L}_3 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ikke er kontekstfritt.

5b

Bruk det du vet om $\mathcal{L}_3$ og $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ fra oppgave 4 til å vise at mengden av kontekstfrie språk ikke er lukket under snitt.

DEL II (Kompleksitetsteori)

Oppgave 6

Hva betyr det at et språk er i *NP*. Svar kort.

La $x_1, \ldots, x_k$ være en liste naturlige tall. Vi sier at $x_1, \ldots, x_k$ kan *sum-splittes* når det finnes $i \in \mathbb{N}$ og permutasjon $y_1, \ldots, y_k$ av $x_1, x_2, \ldots, x_k$ slik at

$$y_1 + \cdots + y_i \;=\; y_{i+1} + \cdots + y_k\ .$$

Språket *SSPLIT* er mengden

$$\{\ \langle x_1, \ldots, x_k \rangle \mid \ x_1, \ldots, x_k \text{ er en liste naturlige tall som kan sum-splittes}\ \}\ .$$

Vi har f.eks. $\langle 4, 3, 7, 3, 6, 9 \rangle \in$ *SSPLIT* siden $4 + 3 + 3 + 6 = 7 + 9$

Oppgave 7

Forklar hvorfor *SSPLIT* er i *NP*. Svar kort.

Språket *SUBSET-SUM* er mengden

$$\{\ \langle S, t \rangle \mid S \subseteq \mathbb{N},\ t \in \mathbb{N} \text{ og det finnes } x_1, \ldots, x_k \in S \text{ slik at } \sum_{i=1}^{k} x_i = t\ \}\ .$$

Språket *SUBSET-SUM*, som er kjent fra læreboken og fjorårets eksamen i INF2080, er *NP*-komplett.
La Σ være et input alfabet. Den polynom-tid beregnbare funksjonen $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ er gitt ved

$$f(\langle \{x_1, \ldots, x_k\}, t \rangle) \;=\; \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{hvis } b \leq 0 \\ \langle x_1, \ldots x_k, a, b \rangle & \text{hvis } b > 0 \end{cases}$$

der $a = t + 1$ og $b = ((x_1 + \ldots + x_k) - t) + 1$. (Merk at $\langle 1 \rangle$ representerer en liste som kun inneholder ett element. En liste med ett element kan ikke sum-splittes.)

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 8

Vis at

$$\langle S, t \rangle \in \textit{SUBSET-SUM} \quad \Rightarrow \quad f(\langle S, t \rangle) \in \textit{SSPLIT} \; .$$

Oppgave 9

Vis at

$$f(\langle S, t \rangle) \in \textit{SSPLIT} \quad \Rightarrow \quad \langle S, t \rangle \in \textit{SUBSET-SUM} \; .$$

Oppgave 10

Er *SSPLIT* et *NP*-komplett språk? Begrunn svaret.