Eksamen 2015

8 La $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ og la $\langle S, t \rangle \in$ SUBSET-SUM. Da finnes det $j_1, \dots, j_m$ slik at $\sum_{i=1}^{m} x_{j_i} = t$.
Vi har $f(\langle S,t \rangle) = \langle x_1, \dots, x_k, a, b \rangle$ siden $\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right) \geq t$
Da er $\left(\sum_{i=1}^{m} x_{j_i} + b, \sum_{x \in S \setminus \{x_{j_1}, \dots, x_{j_m}\}} x + a \right)$ en sum-splitting av $f(\langle S,t \rangle)$ siden

$$\sum_{i=1}^{m} x_{j_i} + b = t + b = t + \sum_{i=1}^{k} x_i - t + 1 = \sum_{i=1}^{k} x_i + 1$$

og

$$\sum_{x \in S \setminus \{x_{j_1}, \dots, x_{j_m}\}} x + a = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i - t\right) + (t+1) = \sum_{i=1}^{k} x_i + 1,$$

så dermed er $f(\langle S,t \rangle) \in$ SSPLIT.

9 Anta at $f(\langle S,t \rangle) \in$ SSPLIT. Siden $\langle 1 \rangle$ ikke kan sumsplittes, er $f(\langle S,t \rangle) = \langle x_1, \dots, x_k, a, b \rangle$.
Siden $a+b = t+1+\sum_{i=1}^{k} x_i - t + 1 = \sum_{i=1}^{k} x_i + 2 > \sum_{i=1}^{k} x_i$, må hver av de to delene av en sumsplitting inneholde nøyaktig en av a og b. La splittingen være $\langle x_{j_1}, \dots, x_{j_m}, b \rangle$ og $\langle x_{j_{m+1}}, \dots, x_{j_k}, a \rangle$. Da er $\sum_{i=1}^{m} x_{j_i} = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i - t\right) + (t+1) - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i - t + 1\right)$ $= t$, så vi har en delmengde av S som har sum t, så $\langle S, t \rangle \in$ SUBSET-SUM.

10 Oppgave 8 og 9, sammen med at f er polynomtidberegnbar, viser at SUBSET-SUM $\leq_p$ SSPLIT. Siden SUBSET-SUM er NP-komplett og SSPLIT er i NP per oppgave 6, er SSPLIT NP-komplett.

7.29 Vi har SET-SPLITTING $\in NP$ siden vi kan lage en verifikator som sjekker om en fargelegging er gyldig, og denne vil kjøre i polynom tid.

Vi viser at $3SAT \leq_p$ SET-SPLITTING.
La φ være en formel på 3-CNF. Da er $f(\varphi)$ gitt som følger: $f(\varphi) = \langle S, C \rangle$ der
$S = \{x_1, \overline{x_1}, \ldots, x_k, \overline{x_k}, y\}$ der $x_1, \ldots, x_k$ er alle variablene i φ.
$C = \{\{x_i, \overline{x_i}\} \mid 1 \leq i \leq k\}$
$\cup \{\{l_1, l_2, l_3, y\} \mid (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ er en klausul i $\varphi\}$

Anta at φ er i 3SAT, der ℓ er en tilfredsstillende tilordning. Hvis $\ell(x_i)$ er sann, farg x_i blå og $\overline{x_i}$ rød. Hvis $\ell(x_i)$ er usann, farg x_i rød og $\overline{x_i}$ blå. Farg y rød. Siden hver klausul i φ inneholder en sann literal, inneholder hver delmengde $\{l_1, l_2, l_3, y\}$ ett blått element og siden y er rød inneholder mengden også ett rødt element. Hver delmengde $\{x_i, \overline{x_i}\}$ inneholder ett rødt og ett blått element. Dermed er $f(\varphi) \in$ SET-SPLITTING.

Anta at $f(\varphi) \in$ SET-SPLITTING. Hvis y er rød,
la $\ell(x_i) = \begin{cases} \text{sann} & \text{hvis } x_i \text{ er blå} \\ \text{usann} & \text{hvis } x_i \text{ er rød.} \end{cases}$ Hvis y er blå,
la $\ell(x_i) = \begin{cases} \text{sann} & \text{hvis } x_i \text{ er rød} \\ \text{usann} & \text{hvis } x_i \text{ er blå.} \end{cases}$ Siden hver mengde inneholder et literal med motsatt farge som y, vil hver klausul inneholde et sant literal, så $\varphi \in 3SAT$.

Det er lett å se at f kan beregnes i lineær tid, så $3SAT \leq_p$ SET-SPLITTING. Dermed er SET-SPLITTING NP-komplett.