2.4

a) Se læreboka

b) $S \to 1T1 \mid 0T0$

$T \to 0T \mid 1T \mid \varepsilon$

c) $S \to 0T \mid 1T$

$T \to 00T \mid 01T \mid 10T \mid 11T \mid \varepsilon$

d) Se læreboka

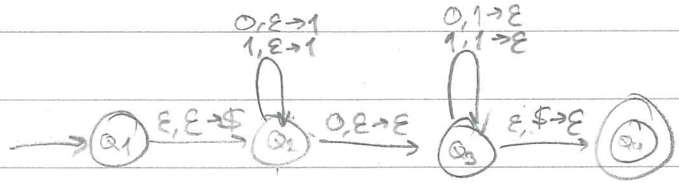
e) $S \to 1S1 \mid 0S0 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$

f) Grammatikken med ingen regler

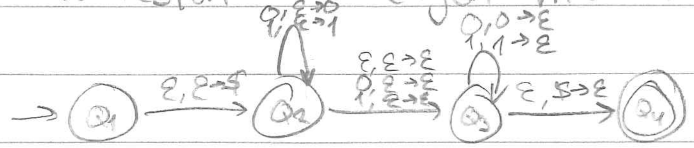
2.5

Språkene i a), b), c) og f) er regulære språk, så vi gir ikke løsningsforslag til disse. Husk at enhver NFA er en PDA.

d) Denne automaten fungerer ved å først lese n symboler, så lese en 0, og så sjekke om resten av strengen består av n symboler.



e) Denne automaten lagrer de første n symbolene i strengen, leser så enten ε, 0 eller 1, og sjekker så at resten av strengen matcher (baklengs) det som ble lagret



2.33

$S \overset{0}{\to} T$

$T \to \overset{1}{TaTaTbT} \mid \overset{2}{TaTbTaT} \mid \overset{3}{TbTaTaT} \mid \overset{4}{TT} \mid \overset{5}{\varepsilon}$

Lemma:

Anta at s er en streng som inneholder dobbelt så mange a'er som b'er. Da finnes det en delstreng av s av lengde 3 som består av 2 a'er og 1 b.

Bevis for lemma:

Dette er åpenbart sant dersom s har lengde 3, så la $|s| = 3n, n \geq 1$. La $s = s_1 \dots s_{3n}$. Definer funksjonen $f : \{1, \dots, 3n-2\} \to \{0,1,2,3\}$ slik at $f(i)$ er antall a'er i strengen $s_i s_{i+1} s_{i+2}$. Hvis vi kan vise at det finnes en j slik at $f(j) = 2$, har vi bevist lemmaet.

Merk at $|f(k+1) - f(k)| \leq 1$, altså at $f(k+1) = f(k) + r, r \in \{-1,0,1\}$

Siden b er i S, er det ikke mulig at $f(k) = 3$ for alle k.

Det er heller ikke mulig at $f(k) \leq 1$ for alle k. Anta at dette er tilfellet. Da er antall a'er i s

$$= \frac{\sum_{i=1}^{3n-2} f(i) + 2[s_1 = a] + [s_2 = a] + [s_{3n-1} = a] + 2[s_{3n} = a]}{3} \leq \frac{3n-2+2+1+1+2}{3} = n + \frac{4}{3}.$$

(Her er $[s_i = a] = \begin{cases} 1 & \text{hvis } s_i = a \\ 0 & \text{hvis } s_i \neq a \end{cases}$. Dette kommer av at enhver blir telt med i 3 $f(j)$'er, bortsett fra evt. på endene)

Siden $n + \frac{4}{3} < 2n =$ antall a'er i s, gir dette en motsigelse.

Vi sjekker nå 3 tilfeller

1) $f(1) \leq 1$
2) $f(1) = 2$
3) $f(1) = 3$

I tilfelle 1 må vi ha på et eller annet tidspunkt $f(j) \geq 2$. Siden f kun kan øke med 1 om gangen, vil det finnes en k slik at $f(k) = 2$.
I tilfelle 2 er vi umiddelbart ferdig.
I tilfelle 3 må vi ha et tidspunkt der $f(j) \leq 2$. Siden kun kan minke med 1 om gangen vil det finnes en k slik at $f(k) = 2$.

Dermed er lemmaet bevist.

Bevis av resultatet:
La oss kalle språket gitt i oppgaven for B.
La oss kalle grammatikken vår for G. Vi skal altså vise at $B = L(G)$.
Det er åpenbart at $L(G) \subseteq B$. I hvert steg der vi legger til terminalsymboler legger vi til 2 a'er og 1 b.
Så vi viser at $B \subseteq L(G)$. Vi viser påstanden:

Dersom s består av 2n a'er, n b'er og et vilkårlig antall T'er, kan s utledes fra S. (*)

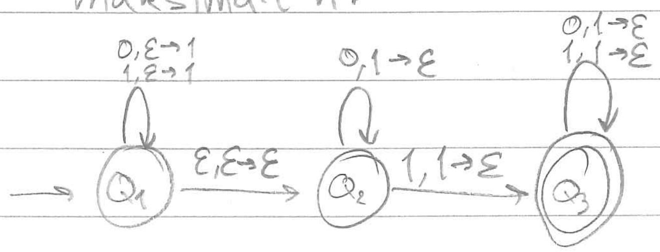
Vi viser (*) ved induksjon. For $n=0$, er $s = T \dots T$, som kan utledes ved en bruk av regel 0, og gjentatt bruk av regel 4 (evt. regel 5). Anta så at (*) gjelder for $n=k$, og betrakt så en streng som består av $2(k+1)$ a'er, $k+1$ b'er og et vilkårlig antall T'er.
Velg så j_1, j_2, j_3 slik at $s = v j_1 T^{k_1} j_2 T^{k_2} j_3 w$, der $j_1 j_2 j_3$ består av 2 a'er og 1 b. (Bruk lemmaet til å vise at dette finnes. Betrakt s med alle forekomster av T fjernet.)

Strengen $s' = vTw$ består av $2k$ a'er og k b'er, og kan dermed utledes fra S via induksjonshypotesen. Siden s kan utledes fra s' ved en anvendelse av regel 1/2/3 (Bruk den som passer j_1, j_2, j_3) og så anvendelser av regel 4 og/eller regel 3, kan s utledes fra S, som var det vi ønsket å vise. Per induksjon gjelder da (*) for alle n.

La så $s \in B$. Da finnes det en n slik at s består av $2n$ a'er og n b'er. Per (*) kan da s utledes fra S, så $s \in L(G)$, og dermed er $B \subseteq L(G)$, og vi konkluderer da at $B = L(G)$.

2.58

a) Denne automaten fungerer ved å lese inn n symboler, så gå til en tilstand der den ser etter symbolet 1, og vil så akseptere dersom den andre halvdelen av strengen har lengde maksimalt n.



b) Denne grammatikken genererer en streng $x = uv$ slik at $|u| = |v|$ med $u \in \Sigma^*$ og $v \in \Sigma^*$, og setter så en streng $t \in \Sigma^*$ foran.
T genererer t, og V genererer uv.

$S \to TV$

$T \to 0T \mid 1T \mid \varepsilon$

$V \to 0V0 \mid 1V0 \mid 0X1 \mid 1X1$

$X \to 0X0 \mid 0X1 \mid 1X0 \mid 1X1 \mid \varepsilon$

V fungerer slik at når man har sett en 1 i andre halvdel av uv, kan man "fylle på innenfra" med en streng av partall lengde.