2.2

a) Grammatikken

$S \to AX$

$A \to aA \mid \varepsilon$

$X \to bXc \mid \varepsilon$

genererer språket A og grammatikken

$S \to YC$

$Y \to aYb \mid \varepsilon$

$C \to cC \mid \varepsilon$

genererer språket B, så A og B er kontekstfrie språk. Men $A \cap B = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ er ikke kontekstfritt per eksempel 2.36 i læreboka.

Dermed finnes det kontekstfrie språk A og B slik at $A \cap B$ ikke er kontekstfritt, så klassen av kontekstfrie språk er ikke lukket under snitt.

b) Anta at klassen av kontekstfrie språk er lukket under komplement. La A og B være kontekstfrie språk. Da er $\overline{A}$ og $\overline{B}$ kontekstfrie språk. Siden klassen av kontekstfrie språk er lukket under union, er $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ kontekstfritt, og det er $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ også. Altså er klassen av kontekstfrie språk lukket under snitt, men det motsier a), altså er klassen av kontekstfrie språk ikke lukket under komplement.

2.42

a) La $L_a = \{0^n 1^n 0^n 1^n \mid n \geq 0\}$.
Anta at L_a er kontekstfritt. Da finnes det en bestemt p fra pumpelemmaet. La $s = 0^p 1^p 0^p 1^p$.
Per pumpelemmaet finnes det en inndeling av $s = uvxyz$.
Hvis vy kun inneholder 0'er, vil uv^2xy^2z inneholde flere 0'er enn 1'ere, så $uv^2xy^2z \notin L_a$. Tilsvarende vil $uv^2xy^2z \notin L_a$ hvis vy kun inneholder 1'ere.
Så vy må inneholde 0'er og 1'ere. Per krav 3 i pumpelemmaet er $|vxy| \leq p$, er det ikke mulig at vy inneholder to 0'er separert av 1'ere, siden det er p slike 1'ere.
Dermed vil uv^2xy^2z ikke inneholde to grupper av 0'ere med like lengde, $uv^2xy^2z \notin L_a$.
Dermed tillater s ingen inndeling $s = uvxyz$, så dette er en motsigelse mot pumpelemmaet, så L_a er ikke regulær.

b) Se læreboka.

c) Se læreboka.

d) La $L_d = \{t_1 \# t_2 \# \ldots \# t_k \mid k \geq 2$, hver $t_i \in \{a,b\}^*$ og $t_i = t_j$ for noen $i \neq j\}$
Anta at L_d er kontekstfritt. Per pumpelemmaet finnes det en bestemt pumpelengde p.
La $s = a^p b^p \# a^p b^p$. La $s = uvxyz$ være en inndeling av s i 5 deler. Vi merker først at vy ikke kan inneholde $\#$, siden da inneholder uv^0xy^0z ingen $\#$, og er dermed ikke med i L_d. Hvis både v og y er på samme side av $\#$, vil ikke uv^2xy^2z være på formen $t_1 \# t_2$, $t_1 = t_2$.
Så vi må ha v og y på hver sin side av $\#$.
Siden $|vxy| \leq p$, er $v = b^n$, $0 \leq n \leq p$, $y = a^m$, $0 \leq m \leq p$, der ikke både $n = 0$ og $m = 0$.

Da er $uv^2xy^2z = a^p b^{p+n} \# a^{p+m} b^p$. Siden ikke både $n=0$ og $m=0$, er dette ikke på formen $t_1 \# t_2$, $t_1 = t_2$, så $uv^2xy^2z \notin L_d$. Dette gir en motsigelse mot pumpelemmaet, så L_d er ikke kontekstfritt.

2.43

$B = \{w \mid w \in \{0,1\}^*,\ w = w^R,$ antall 0'er og 1'ere i w er like$\}$.
Anta at B er kontekstfritt. Per oppgave 2.30 a) er $B' := B \cap 0^*1^*0^* = \{0^n 1^{2n} 0^n \mid n \geq 0\}$ også kontekstfritt. Siden B' er kontekstfritt, finnes det en pumpelengde p. Betrakt $s = 0^p 1^{2p} 0^p$. Anta at vi har en inndeling av $s = uvxyz$. Siden $uv^2xy^2z \in B'$, må vy inneholde like mange 0'er som 1'ere, og minst 1 0. På grunn av strukturen i B' må det finnes to 0'er i vy med $2p$ 1'ere imellom. Men siden $|vxy| \leq p < 2p$, er dette ikke mulig, og vi får en motsigelse. Altså er B' ikke kontekstfritt, og dermed er heller ikke B kontekstfritt.

2.44

$C = \{w \in \{1,2,3,4\}^* \mid$ i w er antall 1'ere lik antall 2'ere,
og antall 3'ere lik antall 4'ere$\}$
Anta at C er kontekstfritt. Per oppgave 2.30 a) er $C' := C \cap 1^*3^*2^*4^* = \{1^n 3^m 2^n 4^m \mid n, m \geq 0\}$ også kontekstfritt. Da finnes det en pumpelengde p. Betrakt strengen $s = 0^p 1^{2p} 0^p$. Anta at vi har en inndeling $s = uvxyz$. Siden $|vxy| \leq p$, må vy maksimalt inneholde to ulike symboler, og antall 1'ere må være likt antall 2'ere i vy, og antall 3'ere må være likt antall 4'ere. Så hvis vy kun inneholder ett symbol, blir dette en motsigelse.

Hvis vy inneholder to symboler er det, siden $|vxy| \leq p$, kan tre muligheter for hva de symbolene er: 1 og 3, 3 og 2 eller 2 og 4.
Dermed vil vy ikke inneholde like mange 1'ere som 2'ere og like mange 3'ere som 4'ere. Altså er det ikke mulig å dele s inn i 5 deler $s = uvxyz$, som gir en motsigelse. Dermed er ikke C' kontekstfritt, og det er heller ikke C.