4.2 Vi har $EQ_{DFA,REX} = \{\langle A,R\rangle \mid A$ er en DFA, R er et regulær uttrykk og $L(A) = L(R)\}$

La M_1 være en Turingmaskin som avgjør EQ_{DFA}.
Vi lager en Turingmaskin som først konverterer R til en DFA D, og så sjekker om $L(A) = L(D)$.

M = "På input $\langle A,R\rangle$:
1. Konverter R til en ekvivalent NFA N ved å bruke prosedyren i Lemma 1.55.
2. Konverter N til en ekvivalent DFA D ved å bruke prosedyren i Teorem 1.39.
3. Kjør M_1 på $\langle A,D\rangle$.
4. Hvis M_1 aksepterer, aksepter. Hvis ikke, forkast."

4.3 Vi har at $L(A) = \Sigma^* \iff \overline{L(A)} = \emptyset$.
La M_2 være en Turingmaskin som avgjør E_{DFA}.
Vi lager en Turingmaskin som først konverterer A til en DFA B som gjenkjenner $\overline{L(A)}$, og sjekker så om $L(B) = \emptyset$.

M = "På input $\langle A\rangle$:
1. Konverter A til en DFA B ved å gjøre hver aksepterende tilstand i A ikke-aksepterende og vice versa.
2. Kjør M_2 på $\langle B\rangle$.
3. Hvis M_2 aksepterer, aksepter. Hvis ikke, forkast."

4.4 La M_3 være en Turingmaskin som avgjør A_{CFG}.
M = "På input $\langle G\rangle$:
1. Kjør M_3 på $\langle G, \varepsilon\rangle$.
2. Hvis M_3 aksepterer, aksepter. Hvis ikke, forkast."

4.13 Dette beviset bygger på følgende resultat tatt fra beviset av pumpelemmaet for kontekstfrie språk: Hvis b er det maksimale antallet symboler på høyre side i en regel og $|V|$ er antall variabler i G, er $b^{|V|+1}$ en pumpelengde for $L(G)$.

Vi vil først lage en avgjører for om en grammatikk er uendelig. Vi gjør dette ved å sjekke om det finnes en streng s slik at $p \leq |s| \leq 2p$ slik at $s \in L(G)$, der p er pumpelengden. Hvis s finnes vil man kunne bruke pumpelemmaet på s, og skape uendelig mange strenger i $L(G)$, så $L(G)$ er uendelig. Hvis $L(G)$ er uendelig vil det finnes en streng s slik at $|s| > p$. Hvis $|s| > 2p$ kan strengen pumpes ned gjentatte ganger til en streng $s' \in L(G)$ med $p \leq |s'| \leq 2p$, så kravet er fylt. For å sørge for $|s'| \geq p$ bruker man krav 3 i pumpelemmaet, for hvis $|s| > 2p$ vil $|s_0|$ (s pumpet ned) $> 2p - |vxy| > p$.
Maskinen D avgjør $INF_{CFG} = \{\langle G \rangle \mid G$ er en CFG og $L(G)$ er uendelig$\}$
La M_4 avgjøre A_{CFG}.

$D =$ "På input $\langle G \rangle$:
1. Beregn $p = b^{|V|+1}$
2. For hver streng s slik at $p \leq |s| \leq 2p$:
   3. Kjør maskin M_4 på $\langle G, s \rangle$.
4. Hvis M_4 noen gang aksepterer, aksepter. Hvis ikke, forkast."

Siden det er kun et endelig antall strenger å sjekke vil D alltid terminere, og vil dermed per begrunnelse over avgjøre INF_{CFG}.

Vi er nå klare til å løse selve problemet i oppgaven. Merk at hvis $L(G)$ er endelig er alle strenger i $L(G)$ mindre enn en pumpelengde p.

Turingmaskinen M avgjør C_{CFG}:

M = "På input $\langle G, k \rangle$:

1. Kjør D på $\langle G \rangle$.
2. Hvis D aksepterer og $k = \infty$; aksepterer.
   Hvis D aksepterer og $k \neq \infty$; forkast.
   Hvis D forkaster og $k = \infty$; forkast.
   Hvis D forkaster og $k \neq \infty$; fortsett.
3. Beregn $p = b^{|V|+1}$.
4. Set en teller til 0.
5. For hver streng s med lengde mindre enn p:
6. Kjør M_4 på $\langle G, s \rangle$.
7. Hvis M_4 aksepterer; legg til en på telleren.
8. Hvis telleren $= k$; aksepter. Hvis ikke; forkast."

Siden D og M_4 er avgjørere og det er kun et endelig antall strenger med lengde mindre enn p, vil M terminere, og per begrunnelsen over avgjør M C_{CFG}.

4.24 Anta først at C er gjenkjennbart. Da finnes det en Turingmaskin M som gjenkjenner C.
Definer Turingmaskinen N som:
N = "På input $\langle w, r\rangle$:
1. Kjør M på w i $|r|$ trinn.
2. Hvis M aksepterer, aksepter.
Hvis M forkaster eller har ikke stoppet, forkast."

Det er åpenbart at N avgjør et avgjørbart språk D.
Vi vil nå vise at $C = \{x \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in D)\}$.
Anta at $w \in C$. Da finnes det en n slik at M aksepterer w i n trinn, så for enhver streng y av lengde $\geq n$ vil $\langle w,y\rangle \in D$, så $\exists y(\langle w,y\rangle \in D)$.
Anta at $\exists y(\langle w,y\rangle \in D)$. Da må M akseptere w, så $w \in C$.
Dermed er $C = \{x \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in D)\}$.

Anta så at det finnes et avgjørbart språk D slik at $C = \{x \mid \exists y(\langle x,y\rangle \in D)\}$.
La $s_1, s_2, \ldots$ være en nummerering av strenger i Σ^*.
La N' være en Turingmaskin som avgjør D.
Definer Turingmaskinen M' som:
M' = "På input w:
1. For $i = 1, 2, \ldots$
2. Kjør N' på $\langle w, s_i\rangle$.
3. Hvis N' aksepterer, aksepter.

Det er tydelig at M' aksepterer $w \iff$ det finnes en i slik at $\langle w, s_i\rangle \in D \iff \exists y(\langle w,y\rangle \in D) \iff w \in C$, så M' gjenkjenner C. Dermed er C gjenkjennbart.