Egenskaper ved polynomtidsreduksjoner

i) La A være et språk over alfabetet Σ.
La f være identitetsfunksjonen, altså
$f(w) = w$ for alle $w \in \Sigma^*$.
f er beregnbar i konstanttid, så også
beregnbar i polynomtid, og $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in A$,
så f er en reduksjon fra A til A, som betyr
at $A \leq_p A$.

ii) La A, B, C være språk over Σ slik at
$A \leq_p B$ og $B \leq_p C$. La f og g være polynomtidsreduksjoner
fra henholdsvis A til B og B til C.
La $h = g \circ f$ (altså $h(w) = g(f(w))$ for alle $w \in \Sigma^*$).
Da er $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B \Leftrightarrow g(f(w)) \in C$, og siden
h kan beregnes i polynom tid (Hvis f bruker $O(n^k)$ tid
og g bruker $O(n^m)$ tid bruker h $O(n^{k \cdot m})$ tid),
er $A \leq_p C$.

iii) La $A = 3SAT$ og $B = CLIQUE$.
Siden $CLIQUE \in NP$ og $3SAT$ er NP-komplett,
er $B \leq_p A$. Tilsvarende, siden $3SAT \in NP$
og CLIQUE er NP-komplett, er $A \leq_p B$.
Dermed er $A \neq B$, men $A \leq_p B$ og $B \leq_p A$.

Et annet mulig eksempel er hvis A og B er
forskjellige språk som begge er i P.

7.35 Vi bygger opp en liste med par av variabler og sannhetsverdier som til slutt skal gi en tilfredstillende tilordning.

La M_{SAT} være en Turingmaskin som avgjør SAT i polynom tid. Vi lager en maskin M:

M = "På input φ:

1. Sett $L = [\,]$.
2. For hver variabel x_i i φ:
   3. For hvert par (x_j, b) i L,
      hvis $b = 0$, sett $\ell_j = \overline{x_j}$;
      hvis $b = 1$, sett $\ell_j = x_j$.
   4. Kjør M_{SAT} på $\varphi \wedge \bigwedge_{(x_j,b)\in L} \ell_j \wedge x_i$.
   5. Hvis M_{SAT} aksepterer; legg til $(x_i, 1)$ i listen.
   6. Hvis M_{SAT} forkaster; legg til $(x_i, 0)$ i listen.
7. Skriv $(x_j : b)$ for enhver (x_j, b) i L."

Denne Turingmaskinen bygger opp en tilordning og fungerer slik at det alltid finnes en tilfredstillende tilordning som er lik den som blir beskrevet av L på variablene i L, så når L inneholder alle variablene i φ, har vi en tilfredstillende tilordning.

7.45 Anta at $P = NP$, og la $A \in P$, med $A \neq \emptyset$ og $A \neq \Sigma^*$.
Da finnes det $w_1 \in A$ og $w_2 \notin A$.

La $B \in NP$ $(= P)$. La f være definert ved

$$f(w) = \begin{cases} w_1 & \text{hvis } w \in B \\ w_2 & \text{hvis } w \notin B \end{cases}$$

Siden $B \in P$ kan f beregnes i polynomtid.
Vi har $w \in B \Rightarrow f(w) = w_1 \in A$ og $w \notin B \Rightarrow f(w) = w_2 \notin A$,
som viser at $B \leq_p A$.

Altså er $A \in NP$ og alle språk B i NP kan polynomtidreduseres i A, som viser at A er NP-komplett.

7.47 Vi tror at PATH ikke er NP-komplett siden PATH er i P, og hvis PATH er NP-komplett vil $P = NP$, noe vi ikke tror er tilfelle.

Anta at vi har vist at PATH ikke er NP-komplett.
Anta så for motsigelse at $P = NP$. Per det vi viste i 7.45 er PATH NP-komplett, som gir en motsigelse og vi har at $P \neq NP$.

7.49 DOUBLE-SAT er i NP fordi du kan lage en verifikator som sjekker om to gitte tilordninger er forskjellige og begge tilfredsstiller den gitte formelen.

Vi lager en reduksjon fra SAT til DOUBLE-SAT.
La f være definert ved
$f(\langle\varphi\rangle) = \langle\varphi \vee \varphi'\rangle$, der φ' er φ med alle literaler byttet ut med sin negasjon.
Anta at $\langle\varphi\rangle \in SAT$. Da har φ en tilfredsstillende tilordning l, som også tilfredsstiller $\varphi \vee \varphi'$. Tilordningen $\bar{l}$ definert ved $\bar{l}(x) = \overline{l(x)}$ tilfredstiller φ', og også $\varphi \vee \varphi'$.
Siden $l \neq \bar{l}$ og begge tilfredsstiller $\varphi \vee \varphi'$, er $f(\langle\varphi\rangle) = \langle\varphi \vee \varphi'\rangle \in$ DOUBLE-SAT. Hvis $\langle\varphi\rangle \notin SAT$ har φ ingen tilfredsstillende tilordning, og det har heller ikke $\varphi \vee \varphi'$, så $f(\langle\varphi\rangle) = \langle\varphi \vee \varphi'\rangle \notin$ DOUBLE-SAT.
Siden f åpenbart kan beregnes i polynomtid, er SAT $\leq_p$ DOUBLE-SAT.

Dermed kan vi konkludere at DOUBLE-SAT er NP-komplett.