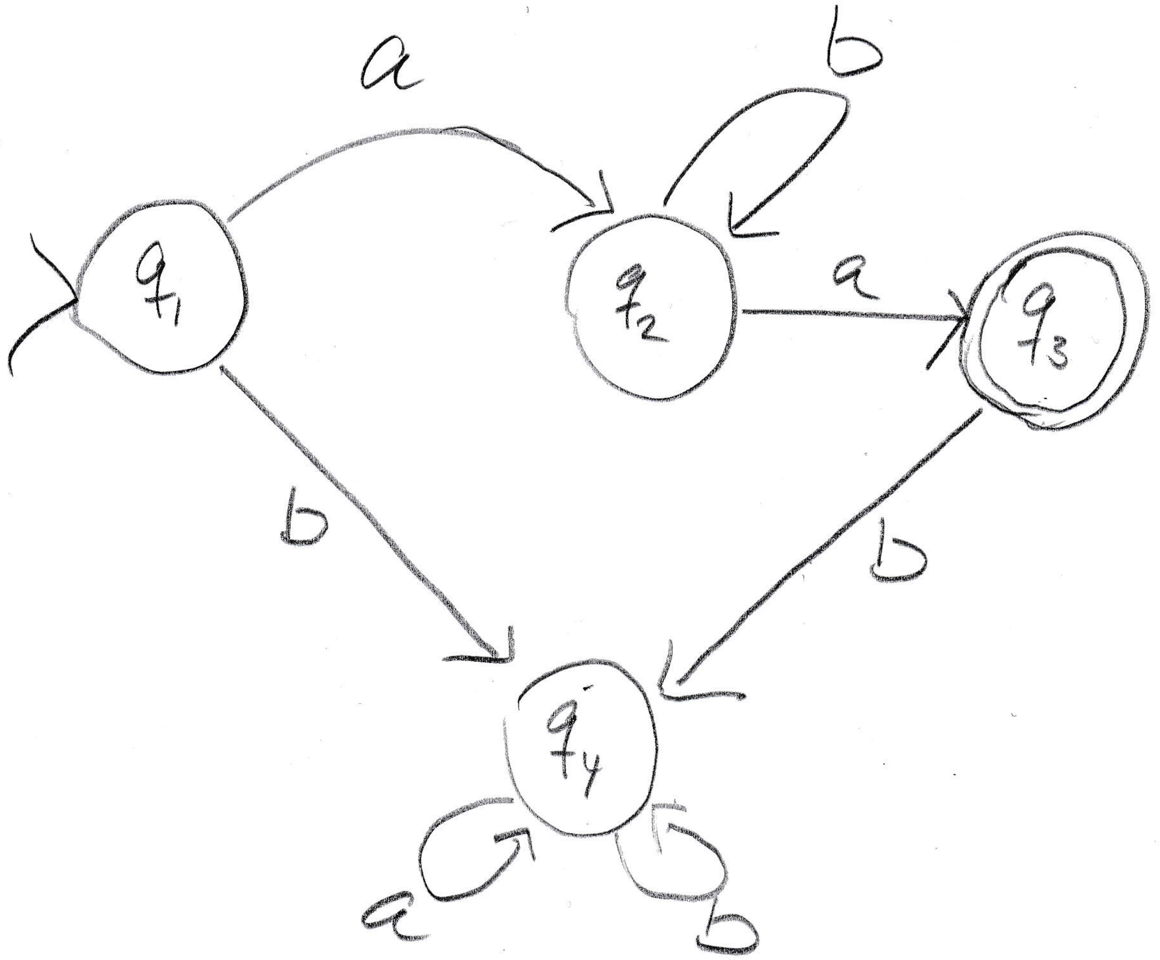
Eksamen IN2080 V20

Løsninger laget av Lars K.

Det er greit å tegne M_1 for å få oversikt:



Oppgave 1

En regulær grammatikk som generer $L(M_1)$ kan f.eks bestå av følgende regler:

$S \rightarrow aB$

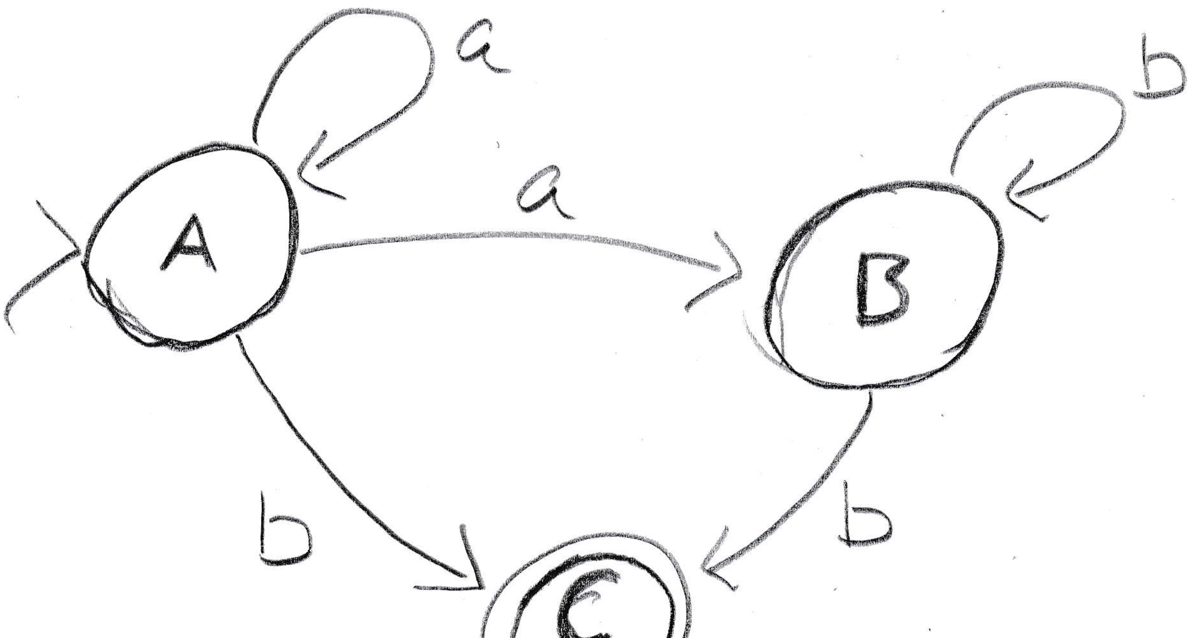
$B \rightarrow bB$

$B \rightarrow aC$

$C \rightarrow \varepsilon$

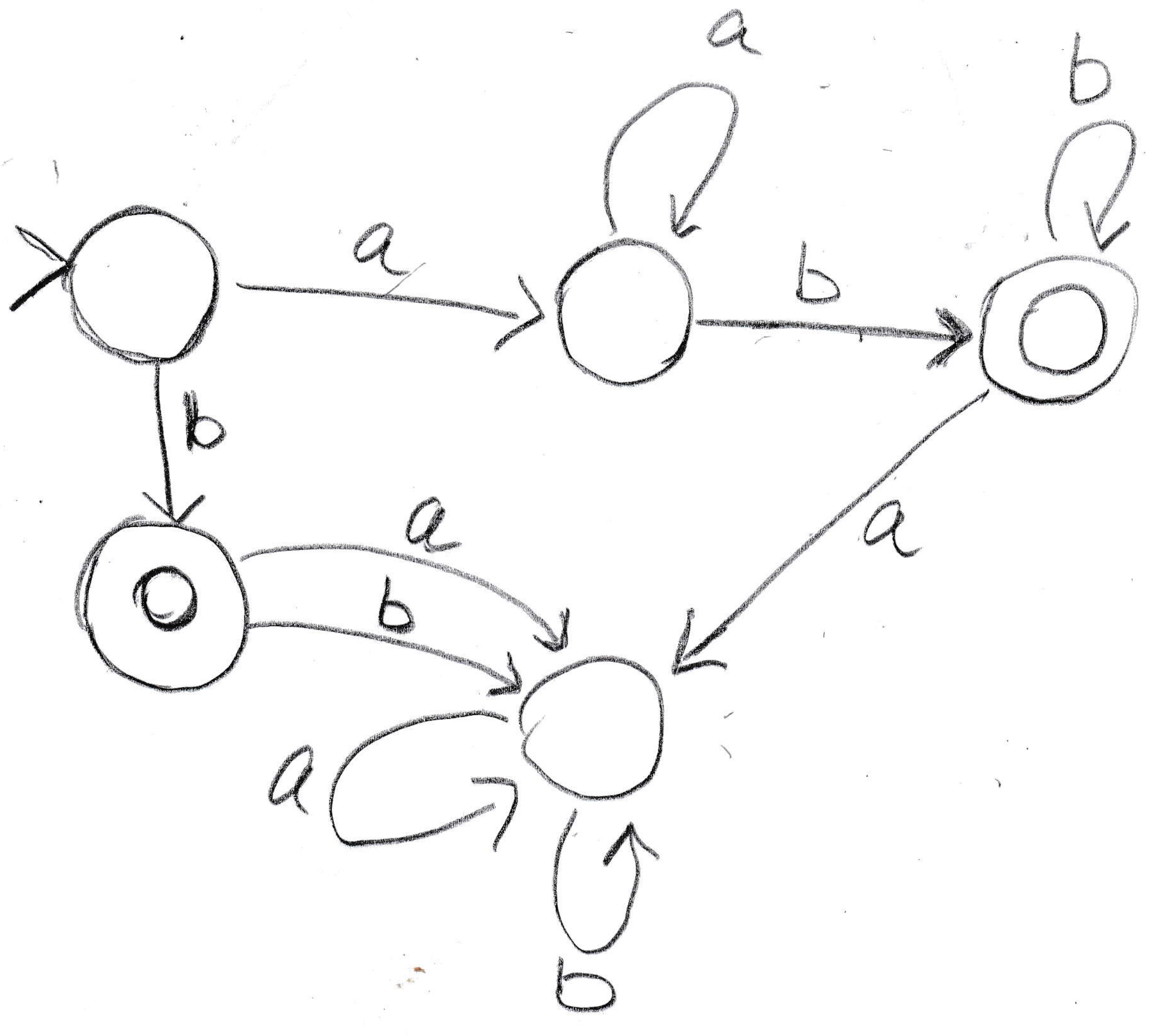
Oppgave 2

La M_2 være automaten gitt ved tegningen nedenfor.



Oppgave 3

La M_3 være automaten gitt ved tegningen nedenfor.



Oppgave 4

Uttrykket

$b \cup aa^*bb^*$

er et akseptabet og godt svar.
Det vil også uttrykket

$b \cup a^*ab^*b$

være.

Oppgave 5

La $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ være en vilkårlig endelig tilstandsautomat. Vi lager en regulær grammatikk G slik at

$$L(G) = L(M).$$

La G være (V, Σ_0, R, S) der

- $V = \{A_i \mid q_i \in Q\} \cup \{S\}$
- $\Sigma_0 = \Sigma$

(5 forts.)

— R består av reglene

- $S \to A_1$
- $A_i \to \varepsilon$ for enhver $q_i \in F$
- $A_i \to aA_j$
  for enhver $q_i, q_j \in Q$, $a \in \Sigma$
  slik at

$$\delta(q_i, a) = q_j .$$

La

$$w_1 w_2 \ldots w_n \vdash_M q_j$$

bety at M vil være i tilstand q_j etter den har lest $w_1 \ldots w_n$ der $w_i \in \Sigma_0$

(5 forts.)

La

$$S \stackrel{*}{\Rightarrow} u$$

bety at $u \in (\Sigma \cup V)^*$ kan utleds fra S i null eller flere trinn.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(Påstand)} \\ w_1 \cdots w_n \vdash_M q_j \iff S \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1 \cdots w_n A_j\end{array}}$$

Det er rimelig lett å se at (Påstand) holder. (Påstand) vises ved induksjon på n. For enhver $q_j \in F$ har vi regelen $A_j \to \varepsilon$ i R. Dermed følger $L(G) = L(M)$ fra (Påstand).

Oppgave 6

La $G=(V,\Sigma_0,R,S)$ være en vilkårlig regulær grammatikk. Vi lager en NFA $M=(Q,\Sigma,\Delta,q_1,F)$ slik at $L(M)=L(G)$.

La $Q=\{q_A \mid A\in V\}$.

La $\Sigma=\Sigma_0$.

La $q_1=q_S$

La $F=\{q_A \mid R \text{ inneholder } A\to\varepsilon\}$.

(6 poeng)

La $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ der

$$\Delta_1 = \{ (q_A, a, q_B) \mid R \text{ inneholder } A \to aB \}$$

og

$$\Delta_2 = \{ (q_A, e, q_B) \mid R \text{ inneholder } A \to B \}.$$

(Påstand)

$$w_1 \cdots w_n \vdash_M q_A \iff S \overset{*}{\Rightarrow} w_1 \cdots w_n A$$

Notasjonen brukt i (Påstand) er forklart i Oppgave 5.

(6 forts)

Det er lett å vise (Påstand) med induksjon på n. Det følger fra (Påstand) og definisjonen av F at

$$L(M) = L(G).$$

Dermed er L(M) regulært siden et språk et reglært hvis og bare hvis det gjenkjennes av en NFA.

Oppgave 7

Et regulært språk er bulgarsk fordi:

- $A \to aB$ er på formen $A \to uBv$ (la $u = a$ og $v = \varepsilon$)

- $A \to B$ er på formen $A \to uBv$ (la $u = \varepsilon$ og $v = \varepsilon$)

- $A \to \varepsilon$ er på formen $A \to u$ (la $u = \varepsilon$).

Oppgave 8

Språket $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ er bulgarsk fordi det kan genereres av den bulgarske grammatikken

$$S \to \varepsilon, \qquad S \to aSb.$$

Ved å bruke pumpelemmaet for regulære språk så kan man vise at L ikke er regulært. Dette er standard bruk av pumpelemmaet så jeg sier ikke noe mer om det her.

En besvarelse fra en kandidat bør inneholde mer.

Oppgave 9

Språket er bulgarsk. Det kan f.eks. genereres av en grammatikk som er gitt ved reglene

$$S \to a A_1 b$$

$$A_1 \to a A b$$

$$A \to a A b$$

$$A \to \varepsilon$$

$$A \to B$$

$$B \to b B a$$

$$B \to \varepsilon.$$

Oppgave 10

Anta at $L(G_3)$ er bulgarsk.
Vi utleder en selvmotsigelse.
La

$$s = (^p)^p[^p]^p$$

der p er gitt ved Teorem 1.

Det er lett å se at $s \in L(G_3)$.

Ved teoremet har vi u, v, x, y, z slik at

$$uvxyz = (^p)^p[^p]^p$$

og (2), (3), (4) holder.

Ved (4) har vi at

- uv inneholder kun ('er
- yz inneholder kun]'er.

(10 forts.)

Ved (2) og (3) har vi at

$$uxy = (^{p-|v|})^{p}[^{p}]^{p-|y|} \in L(G_3)$$

der $|vy| > 0$.

Det er lett å se at grammatikken G_3 ikke kan generere uxy. Dermed har vi $uxy \notin L(G_3)$.

Vi har altså vist at

$$uxy \in L(G_3) \text{ og } uxy \notin L(G_3).$$

Selvmotsigelse!