IN2080 Beregninger og kompleksitet

Eksamen våren 2022

Del 1: Automater (60 poeng)

Oppgave 1 La $\Sigma = \{a, b\}$ være alfabetet og la $|y|_x$ være antall forekomster av substrengen x i strengen y.

a) Lag en automat (DFA eller NFA) som gjenkjenner

1. a^*ba^*
2. $\{w \in \Sigma^* \mid |w|_a + |w|_b = 1\}$

b) Lag et regulært uttrykk som definerer

$$\{w \in \Sigma^* \mid \text{hvert tredje symbol i } w \text{ er en } b\}$$

Oppgave 2 La L være følgende språk over alfabetet Σ:

$$L = \{(ab)^n \, a \, (ab)^n \mid n \geq 0\}$$

Lag en PDA som gjenkjenner L.

Oppgave 3 Den kontekstfrie grammatikken G er gitt ved reglene

$$\begin{aligned} &S \to XY \mid W \\ &X \to aXb \mid \varepsilon \\ &Y \to cY \mid \varepsilon \\ &W \to aWc \mid Z \\ &Z \to bZ \mid \varepsilon \end{aligned}$$

a) Hvilke av følgende ord er i $\mathcal{L}(G)$: ε, ac, $aabc$, $aabbc$? Begrunn svaret.

b) Oversett G til Chomsky normalform.

c) Lag en PDA som gjenkjenner språket $\mathcal{L}(G)$.

d) Hvilke ord på formen $a^i \, b^j \, c^k$ kan genereres fra G? Begrunn svaret.

Oppgave 4 La $\Sigma = \{a, b, c\}$ være et alfabet. Språkene L_1, L_2 og $L_3 \subseteq \Sigma^*$ er gitt ved

- $L_1 = \{a^i\, b^j\, c^k \mid i + k = j\}$
- $L_2 = \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$
- $L_3 = \{z \in \Sigma^* \mid b \text{ kan ikke forekomme før } a \text{ i } z\}$

Et av språkene L_1, L_2, L_3 er regulært, et er kontekstfritt men ikke regulært, og et er ikke kontekstfritt.

a) Hvilket språk er regulært? Begrunn svaret.

b) Hvilket språk er kontekstfritt men ikke regulært? Begrunn svaret.

c) Hvilket språk er ikke kontekstfritt? Begrunn svaret.

Del 2: Beregnbarhetsteori (10 poeng)

Språket

$$A_{\text{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ er en TM og } M \text{ aksepterer } w\}$$

er kjent fra Sipsers bok. Språket A_{TM} er gjenkjennbart[1], men ikke avgjørbart[2].

Oppgave 5 La L_1 og L_2 være språk slik at $A_{\text{TM}} \leq_m L_1$ og $L_2 \leq_m A_{\text{TM}}$. Forklar hvorfor L_1 ikke er et avgjørbart språk. Forklar hvorfor L_2 er et gjenkjennbart språk.

Språket B_{TM} er gitt ved

$$\begin{aligned} B_{\text{TM}} = \{\langle M, w\rangle \mid\ & M \text{ er en TM og } M \text{ aksepterer } w \\ & \text{og } M \text{ aksepterer ingen input som er kortere enn } w\ \}\ . \end{aligned}$$

Oppgave 6 Vis at språket B_{TM} ikke er avgjørbart.

[1] Sipser bruker ordet *recognizable*
[2] Sipser bruker ordet *decidable*

Del 3: Kompleksitetsteori (30 poeng)

Intuitivt så kan en urettet graf *2-fargelegges* hvis det er mulig å fargelegge enhver node med en av to farger, la oss si rød eller blå, slik at to noder får forskjellig farge dersom en kant forbinder dem. Nedenfor finner du en mer formell definisjon av hva det betyr at en graf kan 2-fargelegges.

La G være en urettet graf, og la $n_1, n_2, \ldots, n_k$ være nodene i G. Vi sier at G kan *2-fargelegges* hvis det finnes to mengder av noder A og B slik at

1. $A \cup B = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$
2. $A \cap B = \emptyset$
3. hvis $x, y \in A$, så finnes det ikke en kant i G som forbinder x og y
4. hvis $x, y \in B$, så finnes det ikke en kant i G som forbinder x og y.

Vi definerer språket *2FARG* ved

$$\mathit{2FARG} \quad = \quad \{\langle G \rangle \mid G \text{ er en urettet graf som kan 2-fargelegges}\} .$$

Oppgave 7 Vis at *2FARG* er i NP.

Oppgave 8 Er *2FARG* i SPACE(n)? Begrunn svaret. Er *2FARG* i NSPACE(n)? Begrunn svaret.

Oppgave 9 Vis at *2FARG* er i P.

Oppgave 10 Anta at NP $\neq$ P. Vis at *2FARG* ikke er NP-komplett.