IN2080 Beregninger og kompleksitet

Hjemmeeksamen våren 2020

Automater og språk

En kontekstfri grammatikk[1] (V, Σ, R, S) er *regulær* når hver regel i R er på en av følgende tre former:

- $A \to B$ der $A, B \in V$
- $A \to aB$ der $A, B \in V$ og $a \in \Sigma$
- $A \to \varepsilon$ der $A \in V$ og ε er en den tomme strengen.

For enkelhets skyld vil vi kalle en regulær kontekstfri grammatikk for en *regulær grammatikk*.

Den deterministiske endelig tilstandsautomaten[2] $M_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ er gitt ved

- $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- δ inneholder følgende transisjoner
  - $\delta(q_1, a) = q_2$, $\delta(q_1, b) = q_4$
  - $\delta(q_2, a) = q_3$, $\delta(q_2, b) = q_2$
  - $\delta(q_3, a) = q_4$, $\delta(q_3, b) = q_4$
  - $\delta(q_4, a) = q_4$, $\delta(q_4, b) = q_4$
- $F = \{q_3\}$.

[1]Se Def. 2.2 side 104 i Sipser [1].
[2]Se Def. 1.5 side 35 i Sipser [1].

Oppgave 1. Gi en regulær grammatikk G_1 slik at $L(G_1) = L(M_1)$.

Den regulære grammatikken $G_2 = (V, \Sigma, R, A)$ er gitt ved

- $V = \{A, B, C\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- R er mengden som inneholder reglene

$$A \to aA,\ A \to aB,\ A \to bC,\ B \to bB,\ B \to bC,\ C \to \varepsilon\ .$$

Oppgave 2. Gi en nondeterministisk endelig tilstandsautomat[3] M_2 slik at $L(M_2) = L(G_2)$. Tegn automaten.

Oppgave 3. Gi en deterministisk endelig tilstandsautomat M_3 slik at $L(M_3) = L(G_2)$. Tegn automaten.

Oppgave 4. Gi et regulært uttrykk[4] som beskriver $L(G_2)$.

Oppgave 5. Vis at ethvert regulært språk[5] kan genereres av en regulær grammatikk.

Oppgave 6. Vis at ethvert språk som kan genereres av en regulær grammitikk, er regulært.

Mer om automater og språk

En kontekstfri grammatikk (V, Σ, R, S) er *bulgarsk* når enhver regel i R er på en av følgende to former:

- $A \to uBv$ der $A, B \in V$ og $u, v \in \Sigma^*$
- $A \to u$ der $A \in V$ og $u \in \Sigma^*$.

For enkelhets skyld vil vi kalle en bulgarsk kontekstfri grammatikk for en *bulgarsk grammatikk*. Et språk som kan genereres av en bulgarsk grammatikk, kaller vi et *bulgarsk språk*.

[3]Se Def. 1.37 side 53 i Sipser [1].
[4]Se Def. 1.52 side 64 i Sipser [1].
[5]Se Def. 1.16 side 40 i Sipser [1].

Oppgave 7. Forklar kort hvorfor alle regulære språk er bulgarske.

Oppgave 8. Gi et eksempel på et bulgarsk språk som ikke er regulært. Vis at språket ikke er regulært.

Oppgave 9. Er språket

$$\{\ a^n b^m a^m b^n \mid n \geq 2 \text{ og } m \geq 0\ \}$$

bulgarsk? Hvis du tror språket er bulgarsk, skal du lage en bulgarsk grammatikk som generer språket. Hvis du ikke tror at språket er bulgarsk, skal du gi en enkel forklaring på hvorfor spårket ikke kan være bulgarsk.

Teorem 1 (Pumpelemma for bulgarske språk) *La L være et bulgarsk språk. Da finnes det et tall p (pumpelengden) med følgende egenskap: For enhver streng s i L som er ekte lengre enn p, så finnes det strenger u, v, x, y, z som tilfredstiller*

1. $s = uvxyz$
2. $uv^i xy^i z \in L$ *for enhver* $i \geq 0$
3. $|vy| > 0$
4. $|uv| \leq p$ *og* $|yz| \leq p$.

Den kontekstfrie grammatikken $G_3 = (V, \Sigma, R, S)$ er gitt ved

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{\ ),(,],[\ \}$
- R er mengden som inneholder reglene

$$S \to SS,\ S \to \varepsilon,\ S \to (S),\ S \to [S]\ .$$

Oppgave 10. Vis at $L(G_3)$ ikke er et bulgarsk språk. Bruk teorem 1.

Oppgave 11. Vis teorem 1.

Vi sier at en bulgarsk grammatikk (V, Σ, R, S) er på *normalform* dersom enhver regel i R er på en av de tre formene

- $A \to aB$ der $A, B \in V$ og $a \in \Sigma$
- $A \to Ba$ der $A, B \in V$ og $a \in \Sigma$
- $A \to \varepsilon$ der $A \in V$ og ε er en den tomme strengen.

Teorem 2 (Normalform for bulgarske gramatikker) *For enhver bulgarsk grammatikk G finnes en bulgarsk grammatikk G' på normalform slik at $L(G) = L(G')$.*

Den bulgarske grammatikken $G_4 = (V, \Sigma, R, S)$ er gitt ved

- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- R er mengen som inneholder reglene

$$S \to aSbb,\ S \to aSa,\ S \to c.$$

Oppgave 12. Gi en bulgarsk grammatikk på normalform som genererer samme språk som G_4.

Oppgave 13. Vis teorem 2.

Kompleksitetsteori

Språket A er gitt ved

$$A \ = \ \{ \ G \mid G \text{ er en regulær grammatikk og } L(G) \neq \emptyset \ \} \ .$$

Husk at $\overline{A}$ betegner komplementspråket til A.

Oppgave 14. Vis at A er NL-komplett.

Oppgave 15. Besvar følgende fire spørsmål:

1. Er A i P?
2. Er $\overline{A}$ i coNL?
3. Er $\overline{A}$ i NL?
4. Er A i L?

Svar kort, men begrunn svarene. Du må gjerne referere til teoremer og lignende i Sipsers bok [1]. Det er ikke mulig å besvare hvert eneste spørmål med et definitivt JA eller et definitivt NEI.

Oppgave 16. Vis at ethvert bulgarsk språk er i NL. Hint: Bruk teorem 2.

Beregnbarhetsteori (bonusoppgave)

La Σ være et alfabet. Språket $H \subseteq \Sigma^*$ er gitt ved

$$H \;=\; \{\ \langle M, w, n\rangle \mid M \text{ er en turingmaskin som bruker færre enn } n \text{ trinn på å akseptere eller avise input } w\ \}\ .$$

Vi holder oss til konvensjonen om at et (naturlig) tall skal representeres binært på en turingmaskins input-teip.

Oppgave 17. Er H et gjenkjennbart[6] språk? Er H et avgjørbart[7] språk? Er H et språk i kompleksitetsklassen P? Svar kort, men begrunn svarene.

Vi definerer funksjonen f ved

$$f(\langle M, w\rangle) \;=\; \begin{cases} n+1 & \text{der } n \text{ er den minste } n \text{ slik at } \langle M, w, n\rangle \in H \\ 0 & \text{hvis en slik } n \text{ ikke finnes.} \end{cases}$$

Språket H' er gitt ved

$$H' \;=\; \{\ \langle M, w\rangle \mid \langle M, w, f(M, w)\rangle \in H\ \}\ .$$

[6]Et *gjenkjennbart språk* kalles *a Turing-recognizable language* i Sipsers bok [1], se Def. 3.5 side 170.

[7]Et *avgjørbart språk* kalles *a Turing-decidable language* i Sipsers bok [1], se Def. 3.6 side 170.

Oppgave 18. Er H' et gjenkjennbart språk? Er H' et avgjørbart språk? Er H' et språk i kompleksitetsklassen P? Svar kort, men begrunn svarene.

La $g : \Sigma^* \to \Sigma^*$ være en total og beregnbar[8] funksjon. (At g skal være total betyr at $g(w)$ er definert for enhver $w \in \Sigma^*$.)

Oppgave 19. Vis at det finnes en turingmaskin M slik at $|g(w)| < f(M, w)$ (for alle $w \in \Sigma^*$).

Oppgave 20. Forklar kort hvorfor f ikke er en beregnbar funksjon.

References

[1] Michael Sipser: *Introduction to the Theory of Computation.* 3rd Edition, International Edition, Cengage Learning, 2013.

[8] Se Def. 5.17 side 234 i Sipser [1].