

Dokument-embeddings / Markov-kjeder

Fredrik Jørgensen, Schibsted Media/UiO

Oversikt

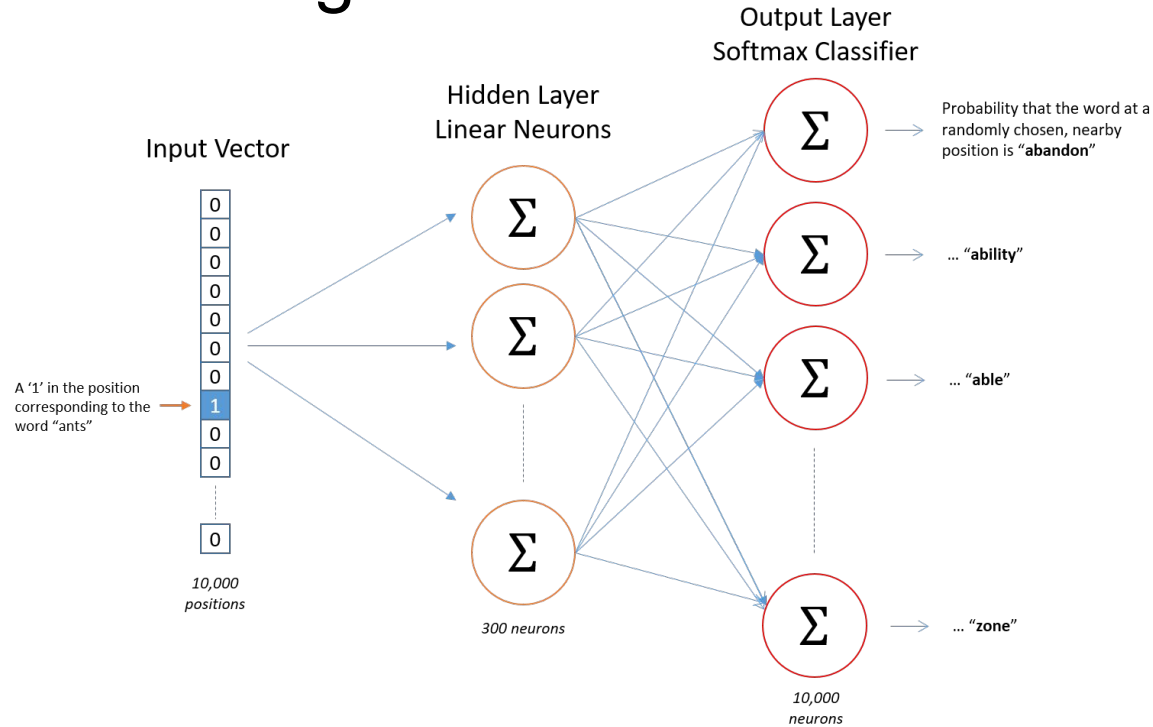
1. Dokument-embeddings: Repetisjon + ord => dokumenter
2. Markovkjeder: Vi bygger en robot-journalist!

1. Dokument-embeddings

Word2Vec: Høynivå

- Trene, ikke telle
- Distribuert/kontinuerlig representasjon, ord har grad av *likhet*
- Til forskjell fra diskret representasjon, alle ord er bare *forskjellige*

Word2vec: Training



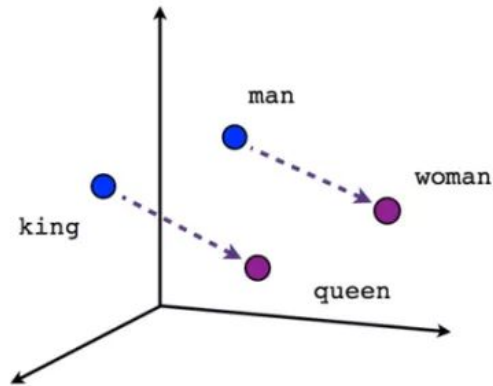
Word2vec: Likhet

Sweden

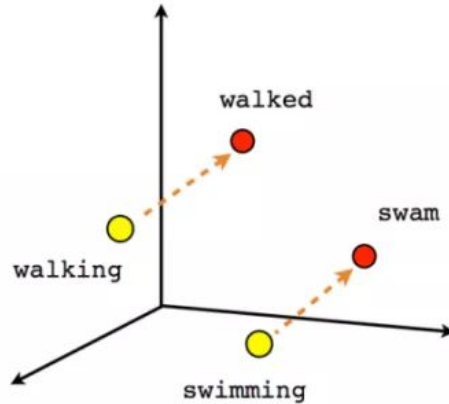
Most similar words

Word	Cosine distance
norway	0.760124
denmark	0.715460
finland	0.620022
switzerland	0.588132
belgium	0.585835
netherlands	0.574631
iceland	0.562368
estonia	0.547621
slovenia	0.531408
floorball_federation	0.529570
luxembourg	0.529477
czech_republic	0.528778
slovakia	0.526340
romania	0.524281
kista	0.522488
helsinki_vantaa	0.519936
swedish	0.519901
balrog_ik	0.514556
portugal	0.502495
russia	0.500196
slovakia_slovenia	0.496051
ukraine	0.495712

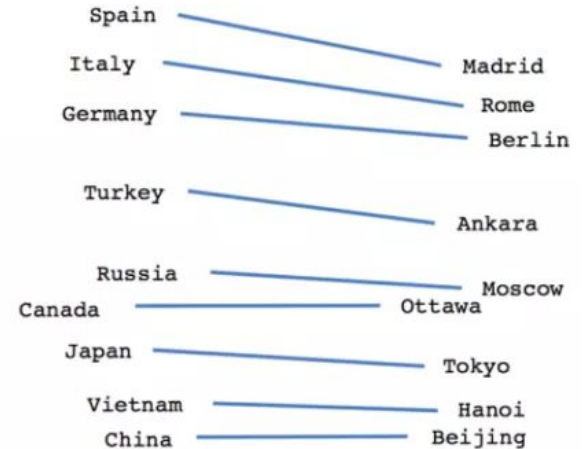
Word2Vec: Egenskaper



Male-Female



Verb tense



Country-Capital

Word2Vec: Selve modellen

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	290	291	292	
fox	-0.348680	-0.077720	0.177750	-0.094953	-0.452890	0.237790	0.209440	0.037886	0.035064	0.899010	...	-0.283050	0.270240	-0.654800	0.101
ham	-0.773320	-0.282540	0.580760	0.841480	0.258540	0.585210	-0.021890	-0.463680	0.139070	0.658720	...	0.464470	0.481400	-0.829200	0.35
brown	-0.374120	-0.076264	0.109260	0.186620	0.029943	0.182700	-0.631980	0.133060	-0.128980	0.603430	...	-0.015404	0.392890	-0.034826	-0.72
beautiful	0.171200	0.534390	-0.348540	-0.097234	0.101800	-0.170860	0.295650	-0.041816	-0.516550	2.117200	...	-0.285540	0.104670	0.126310	0.12
jumps	-0.334840	0.215990	-0.350440	-0.260020	0.411070	0.154010	-0.386110	0.206380	0.386700	1.460500	...	-0.107030	-0.279480	-0.186200	-0.54
eggs	-0.417810	-0.035192	-0.126150	-0.215930	-0.669740	0.513250	-0.797090	-0.068611	0.634660	1.256300	...	-0.232860	-0.139740	-0.681080	-0.37
beans	-0.423290	-0.264500	0.200870	0.082187	0.066944	1.027600	-0.989140	-0.259950	0.145960	0.766450	...	0.048760	0.351680	-0.786260	-0.36
sky	0.312550	-0.303080	0.019587	-0.354940	0.100180	-0.141530	-0.514270	0.886110	-0.530540	1.556600	...	-0.667050	0.279110	0.500970	-0.27
bacon	-0.430730	-0.016025	0.484620	0.101390	-0.299200	0.761820	-0.353130	-0.325290	0.156730	0.873210	...	0.304240	0.413440	-0.540730	-0.03
breakfast	0.073378	0.227670	0.208420	-0.456790	-0.078219	0.601960	-0.024494	-0.467980	0.054627	2.283700	...	0.647710	0.373820	0.019931	-0.03
toast	0.130740	-0.193730	0.253270	0.090102	-0.272580	-0.030571	0.096945	-0.115060	0.484000	0.848380	...	0.142080	0.481910	0.045167	0.05
today	-0.156570	0.594890	-0.031445	-0.077586	0.278630	-0.509210	-0.066350	-0.081890	-0.047986	2.803600	...	-0.326580	-0.413380	0.367910	-0.26
blue	0.129450	0.036518	0.032298	-0.060034	0.399840	-0.103020	-0.507880	0.076630	-0.422920	0.815730	...	-0.501280	0.169010	0.548250	-0.31
green	-0.072368	0.233200	0.137260	-0.156630	0.248440	0.349870	-0.241700	-0.091426	-0.530150	1.341300	...	-0.405170	0.243570	0.437300	-0.46
kings	0.259230	-0.854690	0.360010	-0.642000	0.568530	-0.321420	0.173250	0.133030	-0.089720	1.528600	...	-0.470090	0.063743	-0.545210	-0.19
dog	-0.057120	0.052685	0.003026	-0.048517	0.007043	0.041856	-0.024704	-0.039783	0.009614	0.308416	...	0.003257	-0.036864	-0.043878	0.00
sausages	-0.174290	-0.064869	-0.046976	0.287420	-0.128150	0.647630	0.056315	-0.240440	-0.025094	0.502220	...	0.302240	0.195470	-0.653980	-0.29
lazy	-0.353320	-0.299710	-0.176230	-0.321940	-0.385640	0.586110	0.411160	-0.418680	0.073093	1.486500	...	0.402310	-0.038554	-0.288670	-0.24
love	0.139490	0.534530	-0.252470	-0.125650	0.048748	0.152440	0.199060	-0.065970	0.128830	2.055900	...	-0.124380	0.178440	-0.099469	0.00
quick	-0.445630	0.191510	-0.249210	0.465900	0.161950	0.212780	-0.046480	0.021170	0.417660	1.686900	...	-0.329460	0.421860	-0.039543	0.15

20 rows x 300 columns

Fra ord til dokumenter

- Word embeddings gir oss en god semantisk representasjon av *ord*
- Vi kan finne nærmeste ord i et vektorrom
- Kan vi finne nærmeste *setning* eller *dokument* i et vektorrom?
- word embeddings => document embeddings

Dokument-embeddings1 : Gjennomsnitt

Eksempel:

- Setningen “**vektorer er moro!**”
- En word2vec-modell

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vektorer	0.374540	0.950714	0.731994	0.598658	0.156019	0.155995	0.058084	0.866176	0.601115	0.708073
er	0.020584	0.969910	0.832443	0.212339	0.181825	0.183405	0.304242	0.524756	0.431945	0.291229
moro	0.611853	0.139494	0.292145	0.366362	0.456070	0.785176	0.199674	0.514234	0.592415	0.046450
!	0.607545	0.170524	0.065052	0.948886	0.965632	0.808397	0.304614	0.097672	0.684233	0.440152

Dokument-embeddings 1: Gjennomsnitt

Eksempel:

- Setningen “vektorer er moro!”
- En word2vec-modell

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
vektorer	0.374540	0.950714	0.731994	0.598658	0.156019	0.155995	0.058084	0.866176	0.601115	0.708073
er	0.020584	0.969910	0.832443	0.212339	0.181825	0.183405	0.304242	0.524756	0.431945	0.291229
moro	0.611853	0.139494	0.292145	0.366362	0.456070	0.785176	0.199674	0.514234	0.592415	0.046450
!	0.607545	0.170524	0.065052	0.948886	0.965632	0.808397	0.304614	0.097672	0.684233	0.440152
μ("vektorer er moro !")	0.403631	0.557661	0.480408	0.531561	0.439886	0.483243	0.216653	0.500710	0.577427	0.371476

Dokument-embeddings 2: Gjennomsnitt med TFIDF

Eksempel:

- Setningen “**vektorer er moro!**”
- En word2vec-modell
- En (TF)IDF-vektor

$$\text{idf}(t, D) = \log \frac{N}{|\{d \in D : t \in d\}|}$$

	idf
vektorer	6.907755
er	0.693147
moro	4.605170
!	2.302585

Dokument-embeddings 2: Gjennomsnitt med TFIDF

Eksempel:

- Setningen “**vektorer er moro!**”
- En word2vec-modell
- En (TF)IDF-vektor
- Vekte embeddingene med (TF)IDF:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
idf('vektorer')	2.587231	6.567302	5.056435	4.135386	1.077739	1.077572	0.401227	5.983333	4.152355	4.891192
idf('er')	0.014268	0.672290	0.577005	0.147182	0.126031	0.127126	0.210885	0.363733	0.299401	0.201865
idf('moro')	2.817687	0.642393	1.345376	1.687159	2.100280	3.615869	0.919532	2.368137	2.728170	0.213912
idf('!')	1.398924	0.392646	0.149787	2.184890	2.223450	1.861404	0.701399	0.224898	1.575505	1.013489
μ(idf("vektorer er moro !"))	1.704527	2.068658	1.782151	2.038654	1.381875	1.670493	0.558261	2.235025	2.188858	1.580114

(Dokument-embeddings 3: TFIDF + PCA)

- Kort om PCA: Matrise-faktorisering, finner de dimensjonene som har størst varians

For spesielt interesserte: [A Simple But Tough-to-beat Baseline For Sentence Embeddings](#)

- Hypotese: Ord har mest varians i den syntaktiske dimensjonen
- Fjerne første PCA komponente(ne), dvs fjerne varians, dvs “fjerne syntaks”
- Vekte med TFIDF

Dokument-embeddings basert på word embeddings

+

- Enkelt å lage
- Ingen trening utover word2vec
- Relativt enkelt å forstå
- Distribuert/kontinuerlig representasjon, *ord* har likhet (jfr. BOW, diskret modell)
 - The pizza was great
 - The margherita was awesome
 - The dog was sick

Dokument-embeddings basert på word embeddings

–

- Fungerer dårlig på lengre tekster. Best på setninger.
- “Regression to the mean”

Farvel til ord og embeddings



Hei hei Andrey Markov



2. Sekvens-modellering og Markov-kjeder

Bokmålsordboka

Oppslagsord Ordbokartikkel

sekvens

sekvens m1 (fra middelalderlatin, av latin *sequi* 'følge')

1 i musikk motiv som gjentas i forandret toneleie

2 **hymne** som blir brukt i katolsk messe

3 rekke av elementer som danner et hele, for eksempel spillkort av samme farge, filmopptak og lignende
vise noen sekvenser fra filmen

Sekvenser

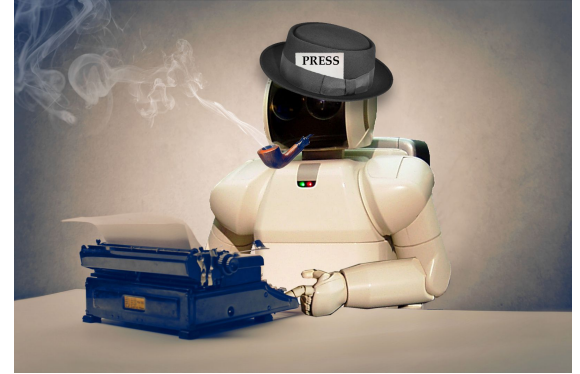
Sekvens = Elementer med en ordning/rekkefølge

Språk er ofte sekvenser. Eksempler:

- Ord i rekkefølge danner fraser/setninger
- Setninger i rekkefølge danner en tekst

Markov-kjeder

- Vi lager en robot-journalist!
- Ved hjelp av en sekvens-modell som heter Markov-kjeder (Markov Chains)
- Roboten skal få lære av tekst skrevet av ekte journalister
- Og så begynne å skrive selv...
- Men først: Markov-kjeder



Markov-kjeder

“Markovkjede er i statistikkfaget en serie med tilfeldige variabler som er egnet til å beskrive prosesser hvor den fremtidige tilstanden kun er avhengig av hva den er nå og ikke hva den har vært.” ¹

¹<https://no.wikipedia.org/wiki/Markovkjede> (16/4-2018)

Markov-kjeder

“Markovkjede er i statistikkfaget en **serie** med tilfeldige variabler som er egnet til å beskrive prosesser hvor den fremtidige tilstanden kun er avhengig av hva den er nå og ikke hva den har vært.”

- *En serie eller sekvens, akkurat som tekst*

Markov-kjeder

“Markovkjede er i statistikkfaget en serie med **tilfeldige** variabler som er egnet til å beskrive prosesser hvor den fremtidige tilstanden kun er avhengig av hva den er nå og ikke hva den har vært.”

- En serie eller sekvens, akkurat som tekst
- *Vi trenger sannsynligheter*

Markov-kjeder

“Markovkjede er i statistikkfaget en serie med tilfeldige variabler som er egnet til å **beskrive prosesser** hvor den fremtidige tilstanden kun er avhengig av hva den er nå og ikke hva den har vært.”

- En serie eller sekvens, akkurat som tekst
- Vi trenger sannsynligheter
- *Her skal vi lage en modell*

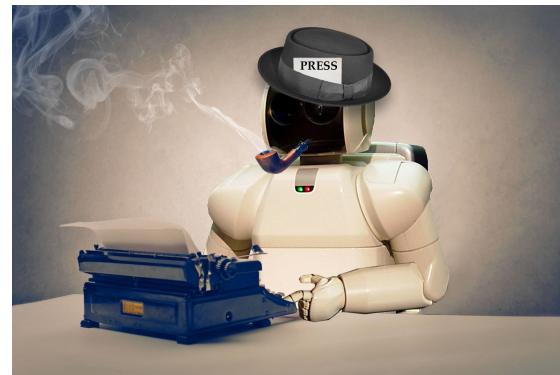
Markov-kjeder

“Markovkjede er i statistikkfaget en serie med tilfeldige variabler som er egnet til å beskrive prosesser **hvor den fremtidige tilstanden kun er avhengig av hva den er nå og ikke hva den har vært.**”

- En serie eller sekvens, akkurat som tekst
- Vi trenger sannsynligheter
- Her skal vi lage en modell
- *Dette kalles “Markov-egenskapen” og betyr at vi ikke trenger å huske tidligere tilstander, kun den nåværende*

Markov-kjeder

- Dette skal roboten lære:
- **Input:** Masse overskrifter
- **Output:** Overskrifter som ligner på det roboten har sett
- Overskrifter er sekvenser av ord



Markov-kjeder

“Markovkjede er i statistikkfaget en serie med tilfeldige variabler som er egnet til å beskrive prosesser hvor den fremtidige tilstanden **kun er avhengig av hva den er nå og ikke hva den har vært.**”

$$\Pr(X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

Markov-kjeder

“Markovkjede er i statistikkfaget en serie med tilfeldige variabler som er egnet til å beskrive prosesser hvor den fremtidige tilstanden **kun er avhengig av hva den er nå og ikke hva den har vært.**”

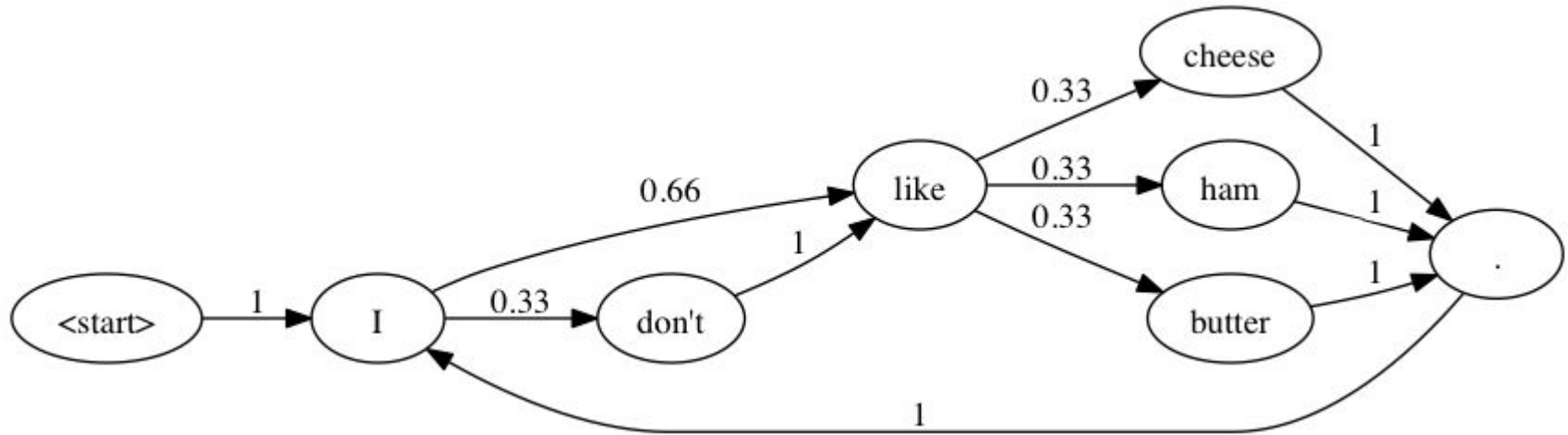
$$\Pr(X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

=

$$\Pr(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n)$$

(Markov assumption)

Markov-kjeder: Grafisk representasjon



Markov-kjeder: Definisjon i J&M

Fra Jurafsky & Martin (3rd ed.), kap. A.1:

$$Q = q_1 q_2 \dots q_N$$

a set of N **states**

$$A = a_{01} a_{02} \dots a_{n1} \dots a_{nn}$$

a **transition probability matrix** A , each a_{ij} representing the probability of moving from state i to state j , s.t. $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i$

$$q_0, q_F$$

a special **start state** and **end (final) state** that are not associated with observations

Markov-kjeder

“Markovkjede er i statistikkfaget en serie med tilfeldige variabler som er egnet til å beskrive prosesser hvor den fremtidige tilstanden kun er avhengig av hva den er nå og ikke hva den har vært.”

Kan vi bygge det? Klart vi kan!



3. Implementasjon

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:
```

```
    def __init__(self):
```

```
        self.memory = defaultdict(lambda: [])
```

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:
```

```
    def __init__(self):
```

```
        self.memory = defaultdict(lambda: [])
```

For å lære fra data, må vi huske litt...

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:
```

```
    def __init__(self):
```

```
        self.memory = defaultdict(lambda: [])
```

Men hva trenger vi å huske?

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:
```

```
    def __init__(self):
```

```
        self.memory = defaultdict(lambda: [])
```

Vi må huske *forrige tilstand*
og *nåværende tilstand*

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:
```

```
    def __init__(self):
```

```
        self.memory = defaultdict(lambda: [])
```

Tilstand = ord. Vi må huske
forrige ord og *nåværende ord*

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:

    def fit(self, sentences):
        for sentence in sentences:
            tokens = sentence.split(" ")
            bigrams = [(tokens[i], tokens[i + 1])
                       for i in range(0, len(tokens) - 1)]
            for (state, output) in bigrams:
                self.memory[state].append(output)
```


Markov-kjeder

Ord-splittede overskrifter



```
class MarkovChain:

    def fit(self, sentences):
        for sentence in sentences:
            tokens = sentence.split(" ")
            bigrams = [(tokens[i], tokens[i + 1])
                       for i in range(0, len(tokens) - 1)]
            for (state, output) in bigrams:
                self.memory[state].append(output)
```

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:
```

```
    def fit(self, sentences):  
        for sentence in sentences:  
            tokens = sentence.split(" ")  
            bigrams = [(tokens[i], tokens[i + 1])  
                       for i in range(0, len(tokens) - 1)]  
            for (state, output) in bigrams:  
                self.memory[state].append(output)
```

Par av *førrige ord* og
nåværende ord

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:
```

```
    def fit(self, sentences):
```

```
        for sentence in sentences:
```

```
            tokens = sentence.split(" ")
```

```
            bigrams = [(tokens[i], tokens[i + 1])
```

```
                        for i in range(0, len(tokens) - 1)]
```

```
            for (state, output) in bigrams:
```

```
                self.memory[state].append(output)
```

Lage i 'memory':
En dict fra *forrige ord* til
en liste av *nåværende ord*

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:
```

```
    def generate(self, words_to_generate, state=' '):
```

```
        if words_to_generate == 0:
```

```
            return state
```

```
        next_word = self._next(state)
```

```
        return state + ' ' +
```

```
            self.generate(words_to_generate - 1, next_word)
```

Markov-kjeder

Lengen på overskriften
Vi skal lage

```
class MarkovChain:
```

```
    def generate(self, words_to_generate, state=' '):
```

```
        if words_to_generate == 0:
```

```
            return state
```

```
        next_word = self._next(state)
```

```
        return state + ' ' +
```

```
            self.generate(words_to_generate - 1, next_word)
```

Markov-kjeder

Overskriften så langt



```
class MarkovChain:
```

```
    def generate(self, words_to_generate, state=''):
```

```
        if words_to_generate == 0:
```

```
            return state
```

```
        next_word = self._next(state)
```

```
        return state + ' ' +
```

```
            self.generate(words_to_generate - 1, next_word)
```

Markov-kjeder

Dette er en *rekursiv* funksjon, dvs.
at den kaller seg selv

```
class MarkovChain:
```

```
    def generate(self, words_to_generate, state=''):  
        if words_to_generate == 0:  
            return state
```

```
        next_word = self._next(state)  
        return state + ' ' +  
            self.generate(words_to_generate - 1, next_word)
```

Markov-kjeder

Her skal vi finne neste ord!

```
class MarkovChain:
```

```
    def generate(self, words_to_generate, state=' '):  
        if words_to_generate == 0:  
            return state
```

```
        next_word = self._next(state)  
        return state + ' ' +  
            self.generate(words_to_generate - 1, next_word)
```


Markov-kjeder

```
class MarkovChain:

    def _next(self, current_state):
        next_possible = self.memory.get(current_state)
        if not next_possible:
            next_possible = self.memory.keys()
        return random.sample(next_possible, 1)[0]
```

Markov-kjeder

Generere neste ord/tilstand fra
nåværende ord/tilstand

```
class MarkovChain:
```

```
    def _next(self, current_state):  
        next_possible = self.memory.get(current_state)  
        if not next_possible:  
            next_possible = self.memory.keys()  
        return random.sample(next_possible, 1)[0]
```

Markov-kjeder

Quiz: Hva slags datastruktur er dette?

```
class MarkovChain:
```

```
    def _next(self, current_state):  
        next_possible = self.memory.get(current_state)  
        if not next_possible:  
            next_possible = self.memory.keys()  
        return random.sample(next_possible, 1)[0]
```

Markov-kjeder

Fasit: En liste med alle ord/tilstander vi har sett som følger 'current_state'

```
class MarkovChain:
```

```
    def _next(self, current_state):  
        next_possible = self.memory.get(current_state)  
        if not next_possible:  
            next_possible = self.memory.keys()  
        return random.sample(next_possible, 1)[0]
```

Markov-kjeder

Hvis vi ikke har sett dette ordet, tar vi et tilfeldig ord...

```
class MarkovChain:

    def _next(self, current_state):
        next_possible = self.memory.get(current_state)
        if not next_possible:
            next_possible = self.memory.keys()
        return random.sample(next_possible, 1)[0]
```

Markov-kjeder

Vi velger et tilfeldig neste ord

```
class MarkovChain:
```

```
    def _next(self, current_state):  
        next_possible = self.memory.get(current_state)  
        if not next_possible:  
            next_possible = self.memory.keys()  
        return random.sample(next_possible, 1)[0]
```

Markov-kjeder

```
class MarkovChain:
    def __init__(self):
        self.memory = defaultdict(lambda: [])

    def fit(self, sentences):
        for sentence in sentences:
            tokens = sentence.split(' ')
            bigrams = [(tokens[i], tokens[i + 1]) for i in range(0, len(tokens) - 1)]
            for (key, value) in bigrams:
                self.memory[key].append(value)

    def generate(self, sentence_length, state=""):
        if sentence_length == 0:
            return state
        next_word = self._next(state)
        return state + ' ' + self.generate(sentence_length - 1, next_word)

    def _next(self, current_state):
        next_possible = self.memory.get(current_state)
        if not next_possible:
            next_possible = self.memory.keys()
        return random.sample(next_possible, 1)[0]
```

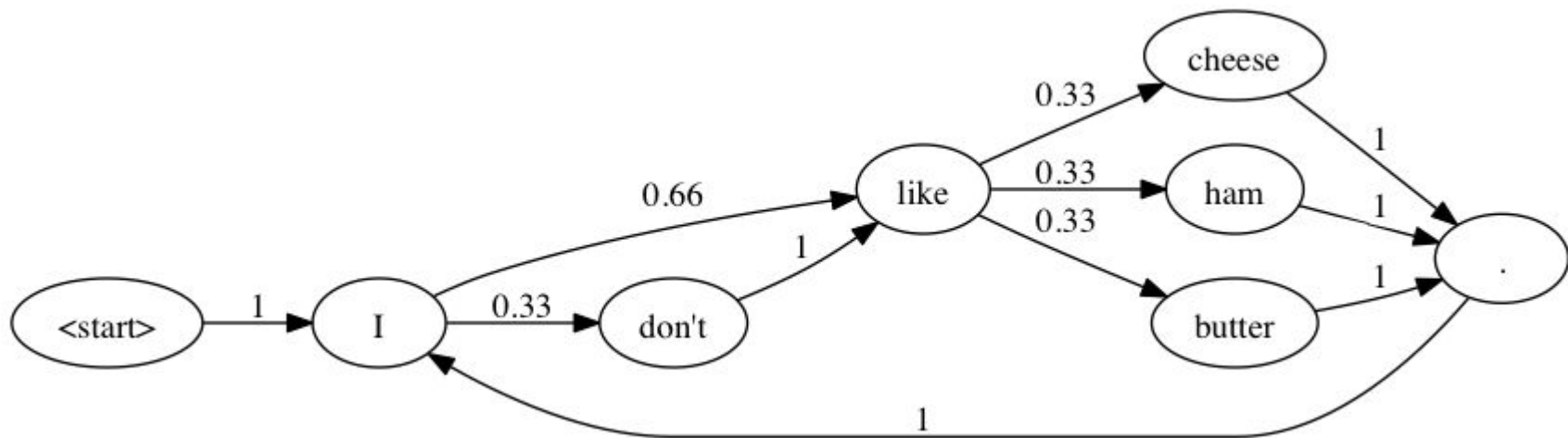
**MINDRE ENN
30 LINJER
MED KODE!**

Markov-kjeder

Demo

Markov-kjeder

Grafisk representasjon:



Demo (v.1)

4. Forbedringer

Forbedringer

Hmm, det er en start, men funker ikke helt bra...

- Det hadde vært fint om modellen selv visste når en setning var ferdig
- Modellen husker ikke så langt tilbake, bare ett ord
- Det er mye redundant data i modellen

Forbedringer

Hmm, det er en start, men fungerer ikke helt bra...

- **Det hadde vært fint om modellen selv visste når en setning var ferdig**
 - Vi introduserer setningsgrenser: spesielle start- og slutt-ord
 - F eks <SOS> og <EOS>
 - Vi legger til disse når vi trener modellen
- Modellen husker ikke så langt tilbake, bare ett ord
- Det er mye redundant data i modellen

Forbedringer

Fra Jurafsky & Martin (3rd ed.), kap. A.1:

$$Q = q_1 q_2 \dots q_N$$

a set of N **states**

$$A = a_{01} a_{02} \dots a_{n1} \dots a_{nn}$$

a **transition probability matrix** A , each a_{ij} representing the probability of moving from state i to state j , s.t. $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i$

$$q_0, q_F$$

a special **start state** and **end (final) state** that are not associated with observations

Forbedringer

Fra Jurafsky & Martin (3rd ed.), kap. A.1:

$$Q = q_1 q_2 \dots q_N$$

a set of N **states**

$$A = a_{01} a_{02} \dots a_{n1} \dots a_{nn}$$

a **transition probability matrix** A , each a_{ij} representing the probability of moving from state i to state j , s.t. $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i$

$$q_0, q_F$$

a special **start state** and **end (final) state** that are not associated with observations

Demo (v.2)

Forbedringer

Hmm, det er en start, men funker ikke helt bra...

- Det hadde vært fint om modellen selv visste når en setning var ferdig
- **Modellen husker ikke så langt tilbake, bare ett ord**
 - Forrige tilstand kan være mer enn bare *ett* ord
- Det er mye redundant data i modellen

Demo (v.3)

(Kan slutte her hvis klokka er 12)

Forbedringer

Hmm, det er en start, men funker ikke helt bra...

- Det hadde vært fint om modellen selv visste når en setning var ferdig
- Modellen husker ikke så langt tilbake, bare ett ord
- **Det er mye redundant data i modellen**
 - I stedet for å lagre alle forekomster etter ord X i en liste, kan vi lagre sannsynlighetene for hvert ord
 - Nå: 'i' => ['dag', 'morgen', 'dag', 'dag', 'dag', 'morgen', ...]
 - Bedre: 'i' => {'dag': 0.2, 'morgen': 0.1, ...}

Forbedringer

Hmm, det er en start, men funker ikke helt bra...

- Det hadde vært fint om modellen selv visste når en setning var ferdig
- Modellen husker ikke så langt tilbake, bare ett ord
- **Det er mye redundant data i modellen**
 - I stedet for å lagre alle forekomster etter ord X i en liste, kan vi lagre sannsynlighetene som en matrise
 - Nå: 'i' => ['dag', 'morgen', 'dag', 'dag', 'dag', 'morgen', ...]
 - Bedre: 'i' => {'dag': 0.2, 'morgen': 0.1, ...}
 - Best: (Markov) matrise

	i	dag	morgen
i	0	0.2	0.1
dag	0.00003		
morgen	0	0	0

Markov-kjeder

Fra Jurafsky & Martin (3rd ed.), kap. A.1:

$$Q = q_1 q_2 \dots q_N$$

a set of N **states**

$$A = a_{01} a_{02} \dots a_{n1} \dots a_{nn}$$

a **transition probability matrix** A , each a_{ij} representing the probability of moving from state i to state j , s.t. $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i$

$$q_0, q_F$$

a special **start state** and **end (final) state** that are not associated with observations