IN3030

Til Oblig 5?
Konvekse Innhyllinga, Introduksjon

Convex Hull, Introduction

Michael Kirkedal Thomsen

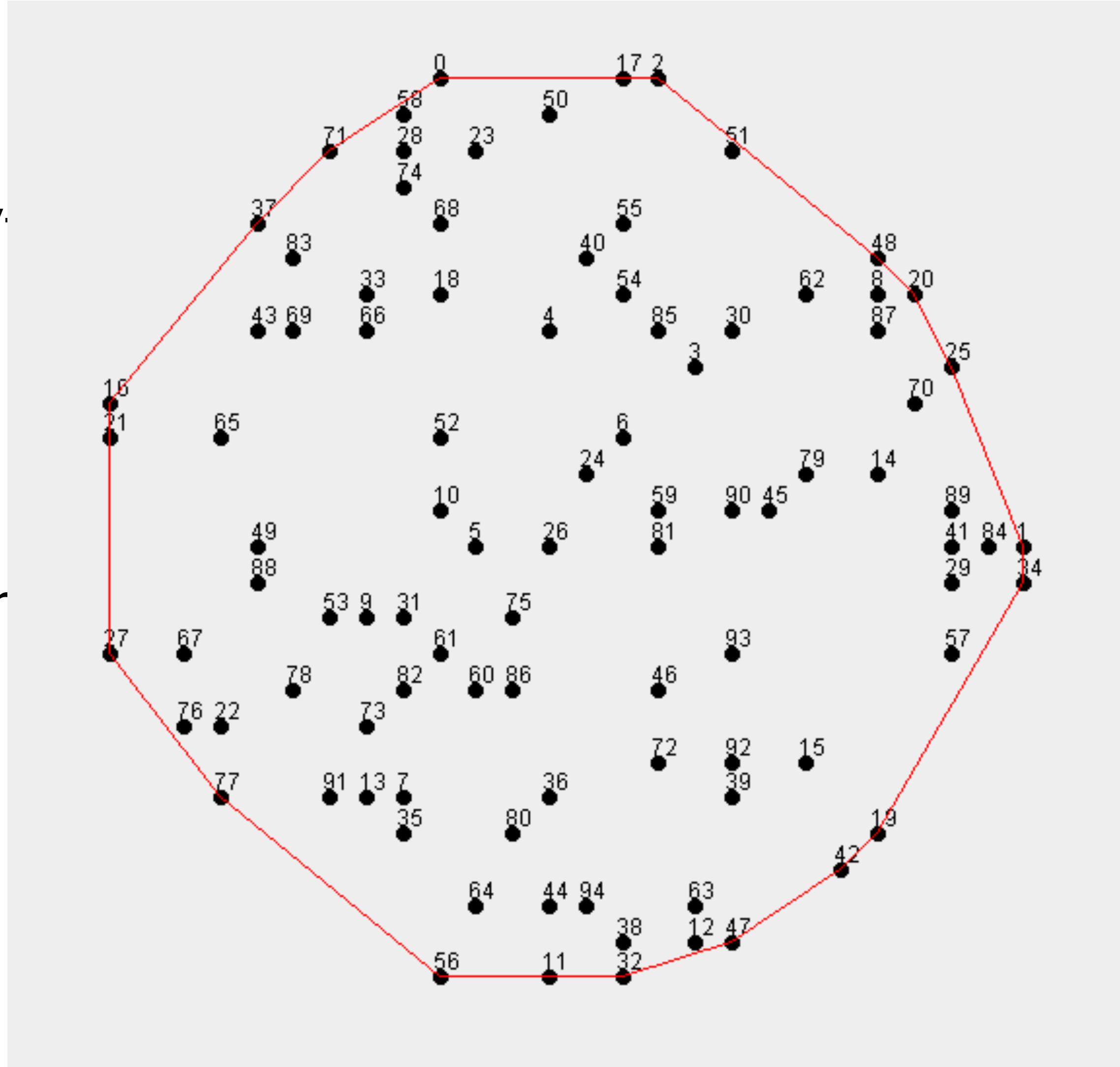
12 april 2023
Slides af Eric og Arne

Den konvekse innhyllinga til n punkter – Oblig 5

- Hva er det, definisjon
  - Hvordan ser den ut
- Hva brukes den til?
- Hvordan finner vi den?

Convex Hull - problemstilling

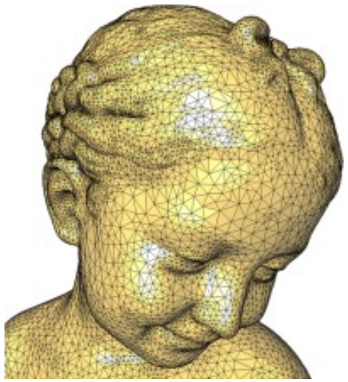
- Vi skal finne den konvekse innhyllinga til n punkter p i et to-dimensjionelt plan, xy-planet.
- Eksempel: 95 tilfeldige punkter og deres innhylling
- en rekke med linjer fra punkt til punkt i mengden slik at alle andre punkter er på 'innsida' av denne mangekanten.
- Mangekanten er konveks, dvs alle indre vinkler er ≤ 180°
- Altså **ikke** linje 19-57 og 57-34.



. Alle punktene på en slik innhylling er med: Altså: linje 16-21 og 21-27, **ikke** linje direkte: 16-27.

Hva bruker vi den konvekse innhyllinga til?

- Innhyllinga er en helt nødvendig første steg i flere-stegs algoritmer innen :
  - Spillgrafikk (modellerering av flater , mennesker, ansikter, hus, borger, terreng, .. osv)
  - Kartografi
    - Høydekart over landskap
    - Sjøkart
    - volumberegninger innen olje-prospektering.



- Er f.eks. starten på en Delaunay-triangulering av punktene.

De etterfølgende figurer er laget i Geogebra . Anbefales sterkt (gratis) – last ned: http://geogebra.no/

Først en enkel geometrisk sats, I

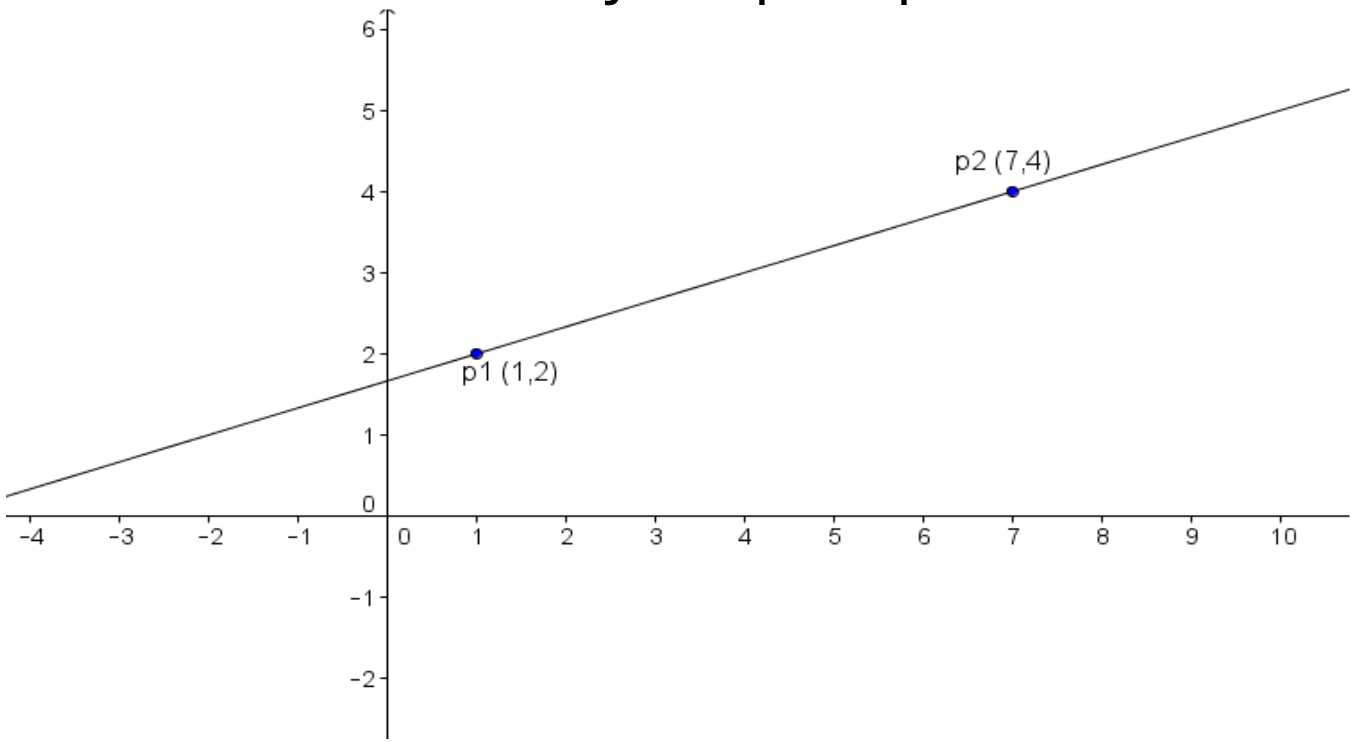
Ligningen for en linje

Enhver linje **fra** et punkt p1 (x1,y1) **til** p2(x2,y2) kan skrives på formen (trivielt forskjellig fra slik Geogebra gjør det):

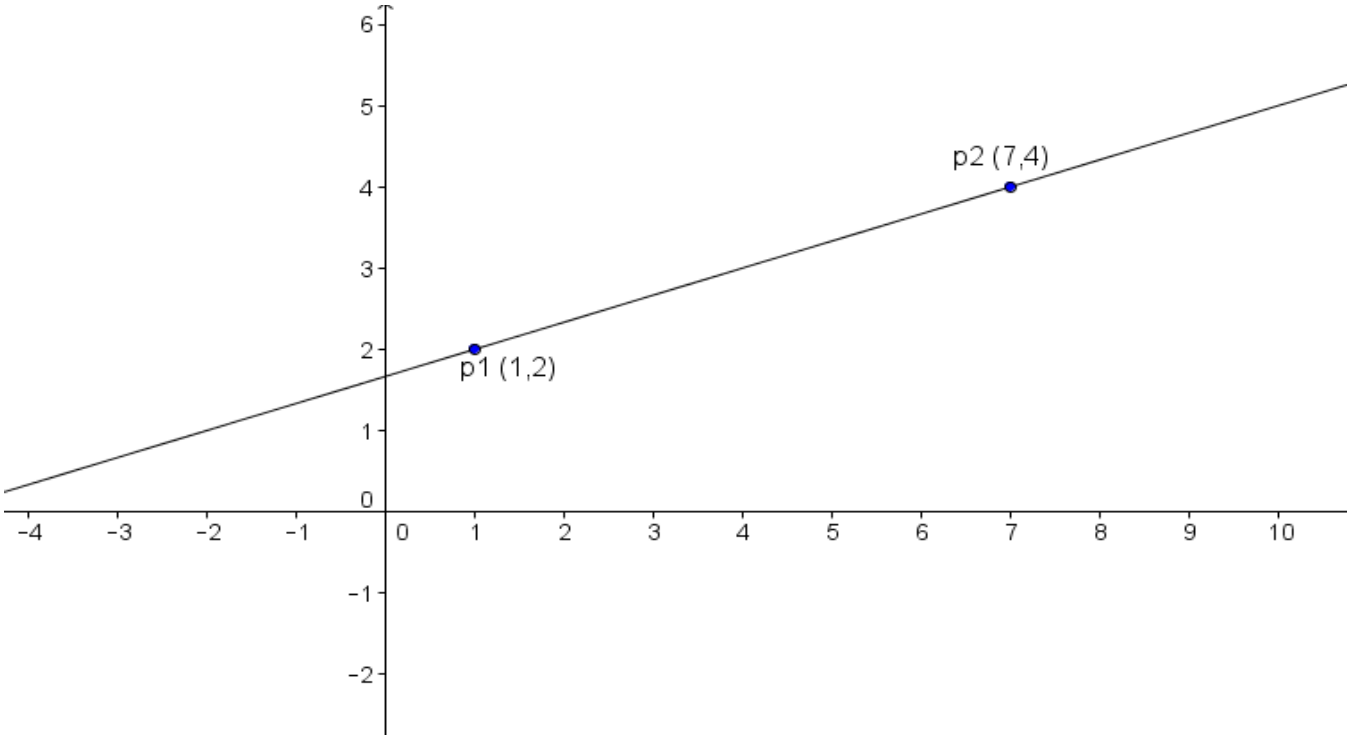
$$\boldsymbol{ax + by + c = 0}$$

Hvor: $a = y1 - y2,\ b = x2 - x1\ og\ c = y2 * x1 - y1 * x2.$

Merk at dette er en rettet linje *fra* p1 *til* p2.



Først en enkel geometrisk sats, II



Figur2. En linje fra p1 (1,2) til p2 (7,4) har da linjeligningen:

$$a = y1 - y2, \quad b = x2 - x1 \quad , \quad c = y2 * x1 - y1 * x2.$$

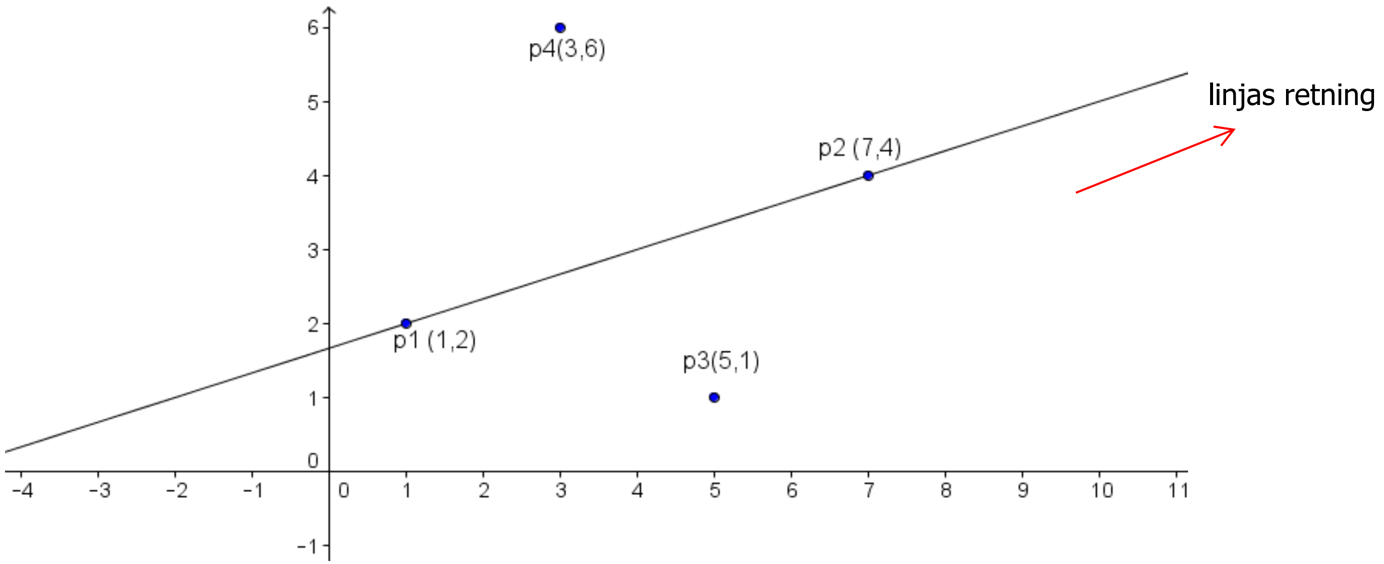
$$(2-4)x + (7-1)y + (4*1 - 2*7) = 0; \; dvs\text{:} \; \mathbf{-2x + 6y - 10 = 0}$$

Avstanden fra et punkt til en linje, I

- Setter vi ethvert punkt på p(px,py) linja, vil linjeligninga gi 0 som svar (per definisjon):

$$a * px + b * py + c = 0$$

- Setter vi inn et punkt som **ikke** er på linja (p4 eller p3) vil vi få et tall som er :
  - negativt (<0) hvis punktet er til høyre for linja, sett i linjas retning: p1 til p2
  - positivt (>0) hvis punktet er til venstre for linja, sett i linjas retning: p1 til p2



Avstanden fra et punkt til en linje II

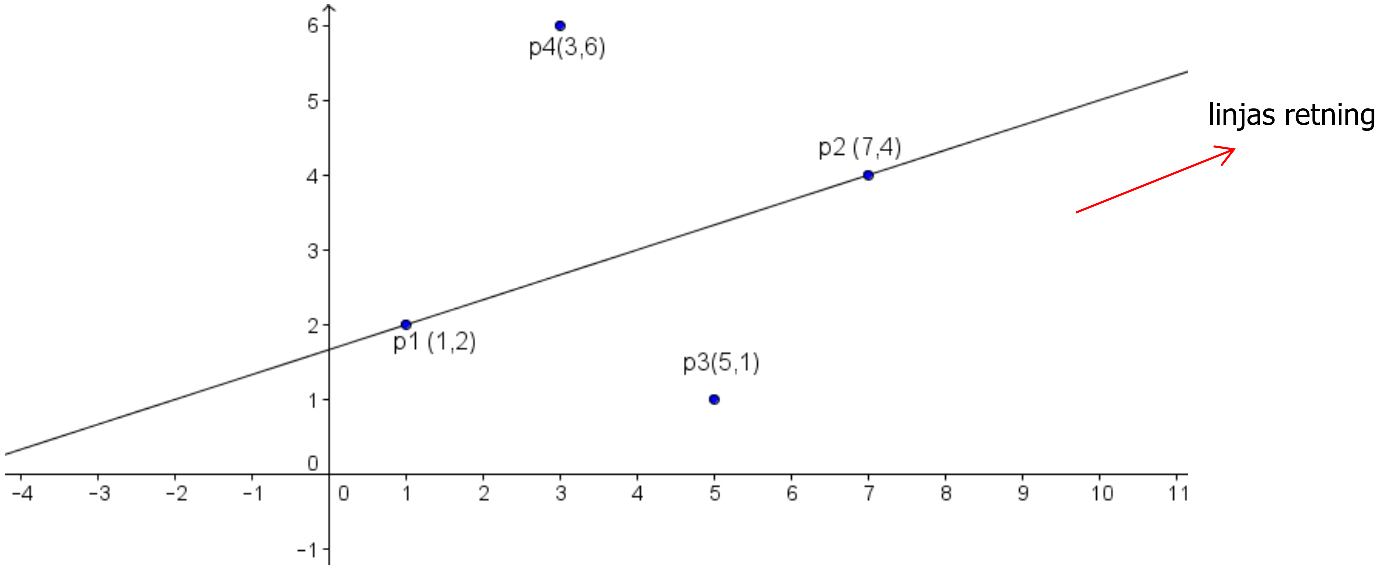
- Avstanden fra et punkt (x,y)til en linje (vinkelrett ned på linja) er :

$$d = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Jo lenger fra linja punktene et desto større negative og positive tall blir det.

Setter inn **p3** (5,1) i linja p1-p2: -2x+6y-10 = 0, får vi

d= : $\frac{-2*5+6*1-10}{\sqrt{40}} = \frac{-14}{6,32} = -\,2,21..$



En linje deler da planet i to: Punktene til høyre og til venstre for linja (sett fra rettet linje fra p1 til p2)

- Vi er nå interessert i de punktene som ligger lengst fra én gitt linje (til høyre for den) $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$ i en stor punktmengde.

- Kan da avstandsformelen forenkles – gjøres raskere ?

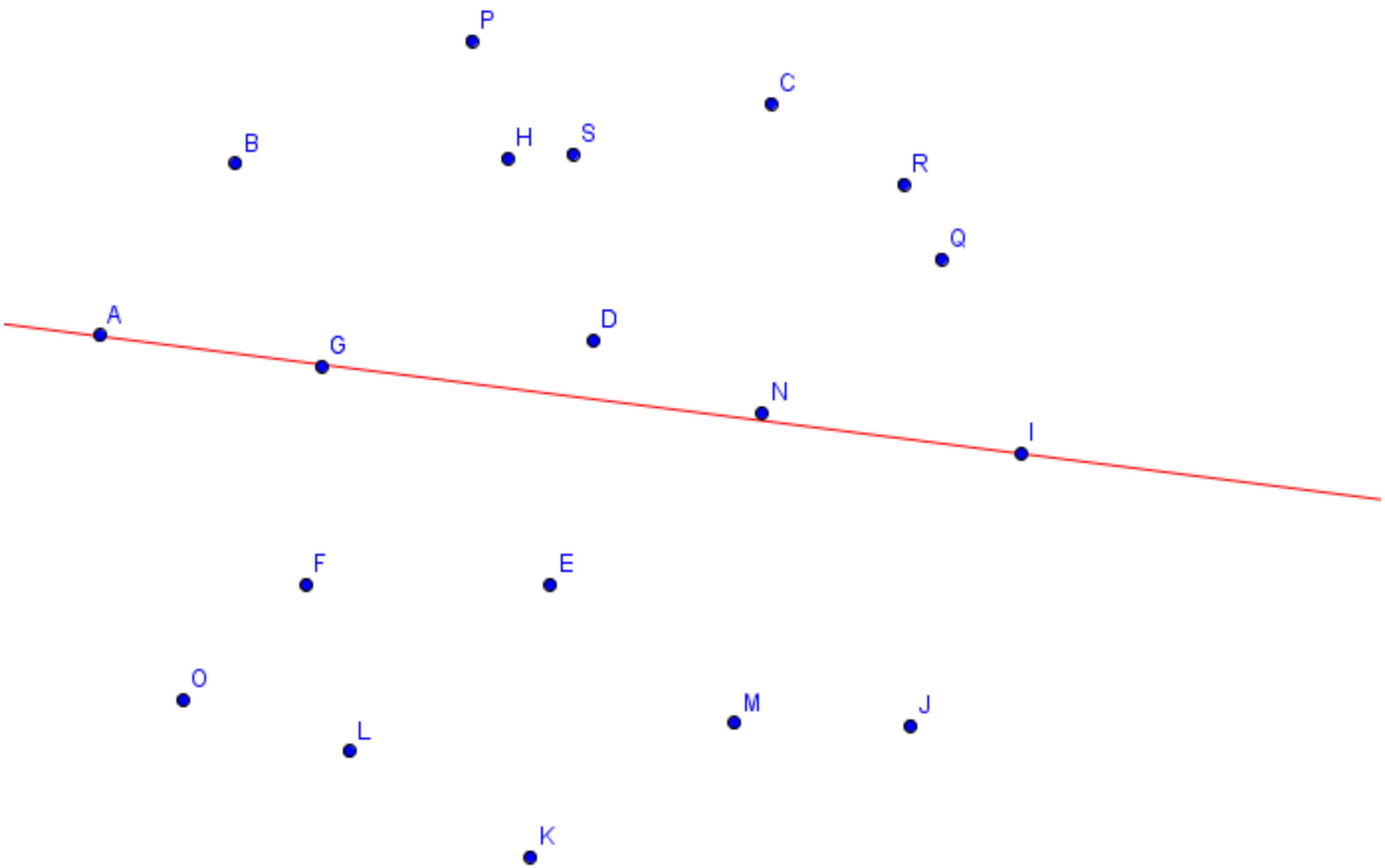
$$d = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Den konvekse innhyllinga til n punkter – Oblig 5

(use whiteboard to illustrate what a convex hull is.)

To observasjoner:

- Punktene med minst og størst x-verdi (A og I) ligger på den konvekse innhyllinga
- De punktetene som ligger lengst fra (positivt og negativt) enhver linje p1-p2, er to punkter på den konvekse innhyllinga.(P og K)

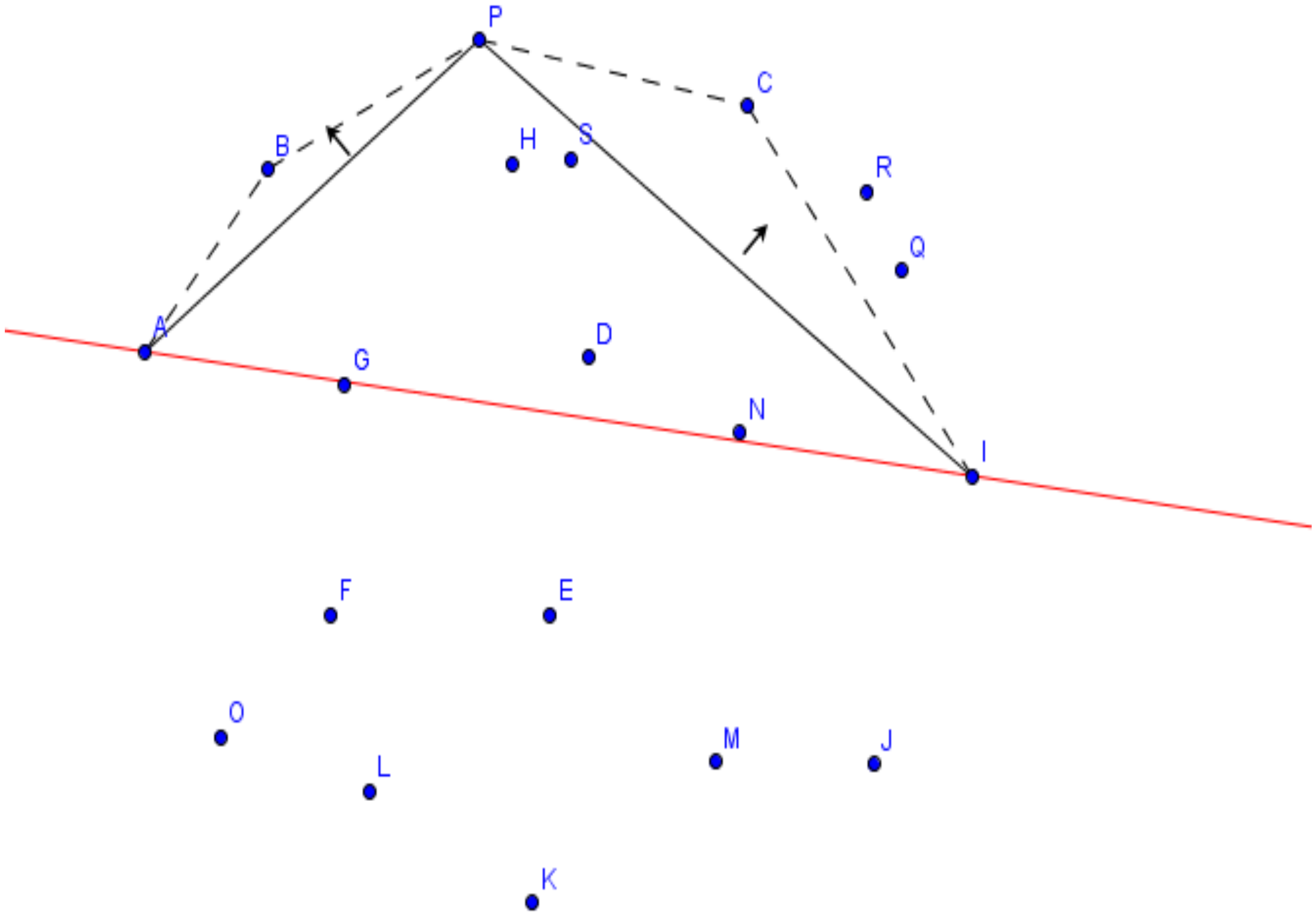


Vi skal etter starten av algoritmen bare se på det punktet som ligger i mest negativ avstand fra linja (dvs mest til-høyre for linja)

Algoritmen for å finne den konvekse innhyllinga sekvensielt

1. Trekk linja mellom de to punktene vi vet er på innhyllinga fra maxx -minx (I - A).
2. Finn punktet med størst negativ (kan være 0) avstand fra linja (i fig 4 er det P). Flere punkter samme avstand, velg vi bare ett av dem.
3. Trekk linjene fra p1 og p2 til dette nye punktet p3 på innhyllinga (neste lysark: I-P og P-A).
4. Fortsett rekursivt fra de to nye linjene og for hver av disse finn nytt punkt på innhyllinga i størst negativ avstand (≤ 0).
5. Gjenta pkt. 3 og 4 til det ikke er flere punkter på utsida av disse linjene.
6. Gjenta steg 2-5 for linja minx-maxx (A-I) og finn alle punkter på innhyllinga under denne.

Rekursiv løsning: Finn først P (mest neg. 'avstand' fra I-A) Trekk så I-P og finn C, Trekk så I-C , og finn R. trekk så I-R og finn Q. Finner så intet 'over' R-C eller C-P. Trekker P-A og finner så B over. Ferdig.



Problemer dere vil møte i den rekursive, sekvensielle løsningen I

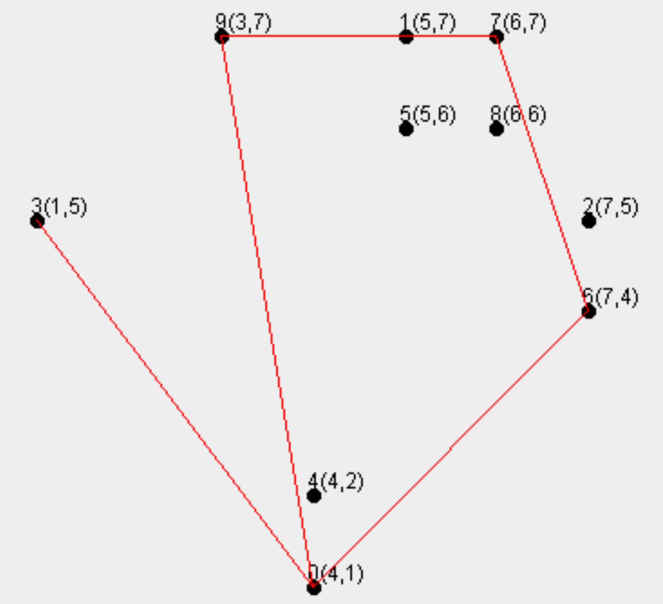
- **Hvordan representere et punkt p_i** ?
  - Med indeksen 'i' (ikke med koordinatene x og y) ?
- **Debugging** (alle gjør feil først) av et grafisk problem vil vi ha tegnet ut punktene og vårt beste forsøk på konvekse innhylling.

Klassen TegnUt (hvis n < 250)
Brukes slik fra main-tråden:

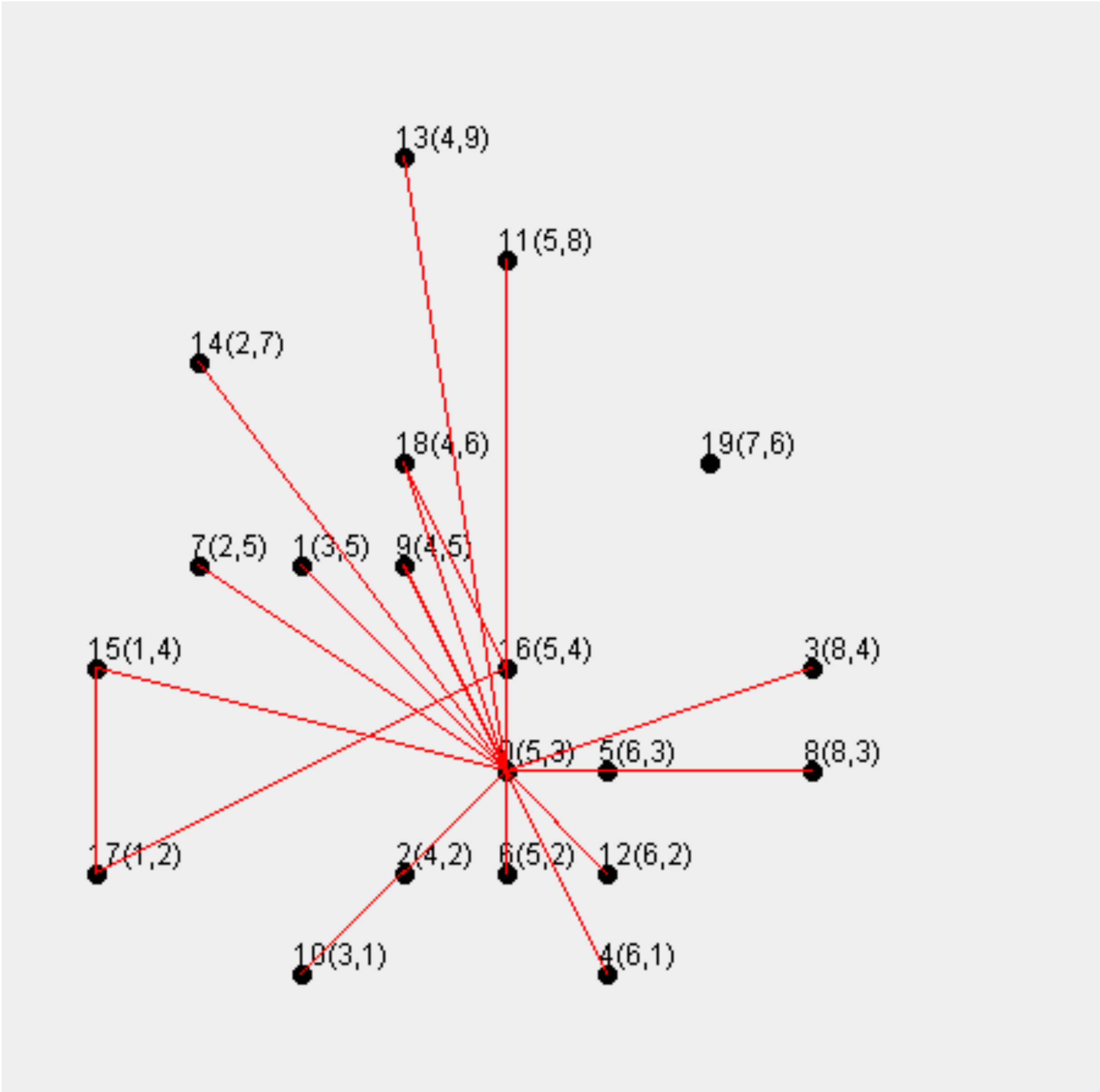
```
TegnUt tu = new TegnUt (this, koHyll);
```

a) TegnUt tegner ut punktene og innhyllinga i en IntList koHyll. Skrives trivielt om av deg hvis du bruker ArrayList. 'this' er en peker til main-objektet.
b) TegnUt antar at main-objektet er et objekt av klassen Oblig5.
c) Ikke nødvendigvis 'proff' kode i klassen TegnUt

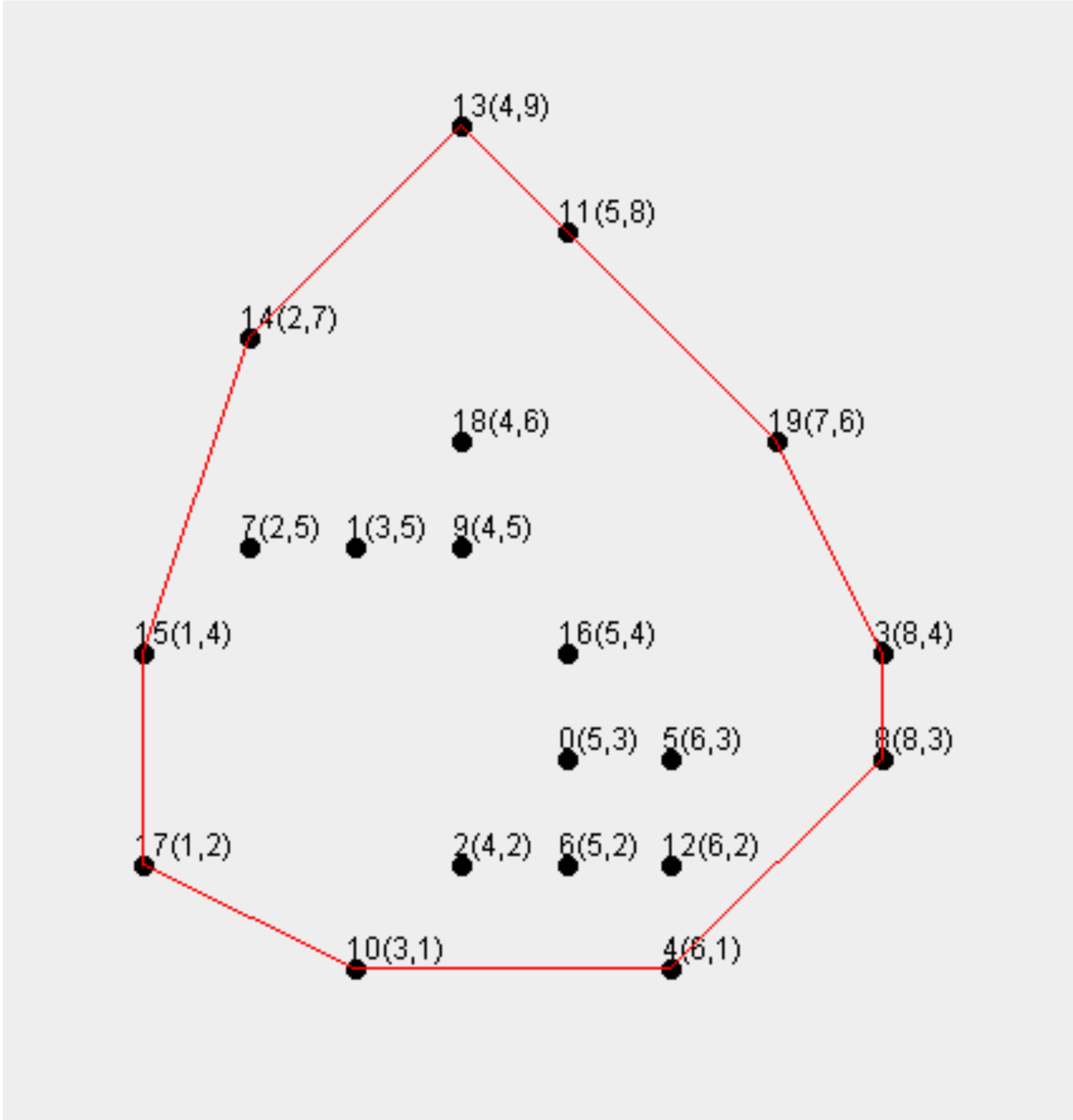
«Litt» feil:



Mye feil:


13(4,9)
11(5,8)
14(2,7)
18(4,6)
19(7,6)
7(2,5)
1(3,5)
9(4,5)
15(1,4)
16(5,4)
3(8,4)
0(5,3)
5(6,3)
8(8,3)
17(1,2)
2(4,2)
6(5,2)
12(6,2)
10(3,1)
4(6,1)

Riktig


13(4,9)
11(5,8)
14(2,7)
18(4,6)
19(7,6)
7(2,5)
1(3,5)
9(4,5)
15(1,4)
16(5,4)
3(8,4)
0(5,3)
5(6,3)
8(8,3)
17(1,2)
2(4,2)
6(5,2)
12(6,2)
10(3,1)
4(6,1)

Problemer dere vil møte i den rekursive, sekvensielle løsningen II

- **Finne punktene på den konvekse innhyllinga i riktig rekkefølge**?
  - Tips: Du bruker to metoder for det sekvensielle tilfellet:
    - sekvMetode() som finner minx, maxx og starter rekursjonen. Starter rekursjonen med to kall på den rekursive metoden, først på maxx-minx, så minx-maxx:
    - sekvRek (int p1, int p2, int p3, IntList m)
      som, inneholder alle punktene som ligger på eller under linja p1-p2, og p3 er allerede funnet som det punktet med størst negativ avstand fra p1-p2.
      IntList m er en mengde punkter som ligger over (til høyre for) linje p1-p2
  - Du kan la sekvRek legge inn ett punkt: p3 i innhyllinga-lista, men hvor i koden er det ?
  - Når legges minx inn i innhyllingslista ?

Problemer dere vil møte i den rekursive, sekvensielle løsningen III

- **Få med alle punktene på innhyllinga hvor flere/mange ligger på samme linje (i avstand = 0), og få dem i riktig rekkefølge.**
- Tips:
  - Husk at når du finner at største negative avstand er = 0 må du ikke inkluderer p1 eller p2 som mulig nytt punkt (de er allerede funnet)
  - Si at du har funnet p1=44 og p2=119. Du bør da bare være interessert i å finne de punktene som ligger mellom p1 og p2 på linja (52 og 123), og da må du teste om nytt punkt p3 har både y og x-koordinater *mellom* tilsvarende koordinater for p1 og p2.
  - Da finner du ett av punktene (si: 123) med kall på sekRek over linja p1-p2 (44-119). Gjenta rekursivt (over 44-123) og 123-119) til det ikke lenger er noen punkter mellom nye p1 og p2.
  - Punktene videre nedetter linja (f.eks. 119-108) finnes av rekursjon tilsvarende som for 44 og 119.