ØV1 — TRIGONOMETRI, KOMPLEKSE TALL OG GEOMETRISKE REKKER

Innleveringsfrist: **21. august**.

Ukeoppgavene skal løses selvstendig og vurderes i øvingstimene. Det forventes at alle har satt seg inn i fagets øvingsopplegg og godkjenningskrav for øvinger. Dette er beskrevet påhjemmesiden til IN3190:
`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN3190/h20/informasjon-om-ovingsopplegget/`

Mål: Kurset IN3190 krever en viss grad av kunnskap om matematikk, både i form av kjennskap til teori og erfaring med bruk og praktisk regning. Oppgavene her oppsummerer en del av de viktigste punktene man bør kjenne til.

Oppgave 1 Trigonometriske funksjoner 2 Poeng

a) Plott følgende trigonometriske funksjoner under hverandre (med parallelle t-akser) for intervallet $-1 \leq t \leq 2.5$, slik at du får vist hvordan de forholder seg til hverandre mht. frekvens og faseskift.

1. $\cos(2\pi t)$
2. $\cos(2\pi t + \pi)$
3. $\cos(8\pi t)$
4. $\cos(4\pi t - \pi/3)$

b) Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur 1.

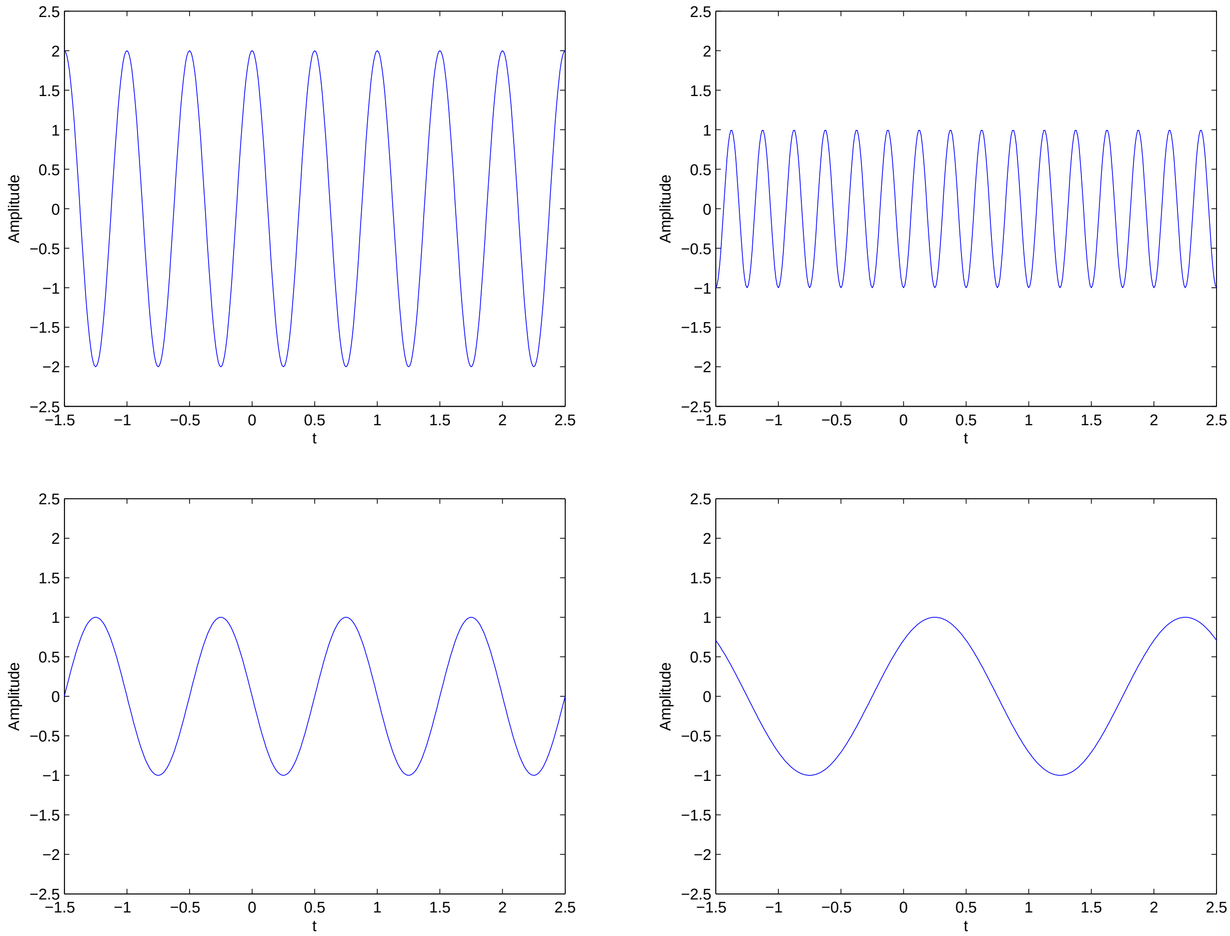

Figure 1: Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur.

Oppgave 2 Diskrete trigonometriske funksjoner 2 Poeng

a) Hvilke av de følgende *diskrete* funksjonene er periodiske, og hva er periodene deres (dvs. N)?

1. $\cos(0.5n + \pi/2)$
2. $\cos(\pi n + \pi/2)$
3. $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi n\right)$

b) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta 5 sampler per halve periode av en cosinus i kontinuerlig tid.
c) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta sampler med avstand 1 sekunder av en cosinus i kontinuerlig tid med vinkelfrekvens 1.

Oppgave 3 Regning med komplekse tall 2 Poeng

a) Regn ut følgende for polar ($z = re^{j\theta}$) og/eller kartesisk ($z = a + jb$) form som angitt. Inkluder mellomregning, spesielt når svaret er oppgitt.

1. z^* på polar form
2. zz^* på polar og kartesisk form (hva er dette det samme som?)
3. z^k på polar form
4. $z + z^*$ på polar og kartesisk form $\boxed{2r\cos\phi}$
5. $z - z^*$ på polar og kartesisk form
6. z^{-1} på polar og kartesisk form (**Merk:** oppgaven er å finne c og d slik at $c + jd = \frac{1}{a+jb}$, samt s og ϕ slik at $se^{j\phi} = \frac{1}{re^{j\theta}}$.)
   $\boxed{\frac{a-jb}{a^2+b^2}, \frac{1}{r}e^{-j\phi}}$
7. Bruk punktene over for å finne et uttrykk for $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$ ved komplekse eksponentialer (Euler identitetene).
8. Hva er forskjellen på z^{-1} og z^*? Beskriv z^{-1} utifra $|z|^2$ og z^*.

b) Skriv følgende tall som komplekse tall på polar form (k er et vilkårlig heltall). Som eksempel kan tallet 1 skrives som $1e^{j\cdot 2\pi k}$.

1. -1
2. $(-1)^k$
3. j^k

Oppgave 4 Regning med komplekse tall 2 Poeng

a) Gjør følgende utregninger. Om svaret står oppgitt må mellomregning inkluderes.

1. $|3 + j4|$ = ?
2. $\frac{1}{3+j4}$ til kartesisk form = ? $\boxed{\frac{3}{25} - j\frac{4}{25}}$
3. $\frac{1+j2}{1+e^{j\pi/2}}$ til kartesisk form = ?
4. $(-1)^n + e^{j\pi n}$ = ?, hvor n er et heltall $\boxed{2\cdot(-1)^n}$

b) Vis at

$$(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = (\cos(\theta n) + j\sin(\theta n)) \qquad \boxed{\text{Ref. til de Moivres formel}} \tag{1}$$

Oppgave 5 Geometriske rekker 2 Poeng

a) Beregn verdien til følgende endelige geometriske rekker:

1. $\sum_{k=0}^{100} 23^k = ?$
2. $\sum_{k=5}^{19} (4.5)^k = ?$ (Tips: del opp summen for å endre summasjonsgrensene).

b) Bestem hvilke av de følgende uendelige geometriske rekkene som konvergerer, og beregn verdien til disse:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{a}\right)^k, a > 4$
3. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}$
4. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}$

c) Finn konvergensområdet til følgende uendelige geometriske rekker. Om svaret er oppgitt, vis mellomregning.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k, x \in \mathbb{R}$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} (x^{-1})^k, x \in \mathbb{R}$
3. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}, z \in \mathbb{C}$ $\boxed{|z| > 2}$