ØV3 — Frekvensdomene-representasjon av signaler

Innleveringsfrist: **17. september** 2021.

Ukeoppgavene skal løses selvstendig og vurderes i øvingstimene. Det forventes at alle har satt seg inn i fagets øvingsopplegg og godkjenningskrav for øvinger. Dette er beskrevet påhjemmesiden til IN3190:
`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN3190/h21/informasjon-om-ovingsopplegget/`

Oppgave 1— Oppg 2.11 fra læreboka (Rao & Swamy) 2 Poeng

Beregn DTFT for disse signalene. ($u(n)$ er en "stepfunksjon" som er null for negative n og 1 ellers)

(a) $x_1(n) = u(n) - u(n-5)$

(b) $x_2(n) = \alpha^n(u(n) - u(n-8)), |\alpha| < 1$

(c) $x_3(n) = n(\frac{1}{2})^{|n|}$

(d) $x_4(n) = \alpha^{|n|} \sin \omega_0 n$

Oppgave 2 2 Poeng

Betrakt følgende periodiske signal som repeterer seg selv uendelig mange ganger med en fundamentalperide $N = 6$:

$$x(n) = \{\dots, 1, 0, 1, 2, \underset{\uparrow}{3}, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, \dots\}$$

a) Skisser signalet $x(n)$ og beregn dets diskret-tid-Fourierserie (DTFS). Bruk følgende definisjon:

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}.$$

Hints: Notér at vi for $k = 0$ får

$$c_0 = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}0\cdot n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) = \frac{1}{6}(3 + 2 + 1 + 0 + 1 + 2) = 9/6 = 3/2$$

.

Man kan også bruke at vi for vilkårlig k kan skrive

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot n} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{\pi}{3}k\cdot n} = \frac{1}{6}(3e^{-j\frac{\pi}{3}k\cdot 0} + 2e^{-j\frac{\pi}{3}k\cdot 1} + 1e^{-j\frac{\pi}{3}k\cdot 2} + 0e^{-j\frac{\pi}{3}k\cdot 3} + 1e^{-j\frac{\pi}{3}k\cdot 4} + 2e^{-j\frac{\pi}{3}k\cdot 5}) \\ &= \frac{1}{6}(3 + 2e^{-j\frac{\pi}{3}k} + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{4\pi}{3}k} + 2e^{-j\frac{5\pi}{3}k}) \\ &= \frac{1}{6}(3 + 2e^{-j\frac{\pi}{3}k} + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{j\frac{2\pi}{3}k} + 2e^{j\frac{\pi}{3}k}) \end{aligned}$$

Denne kan du deretter skrive om til et heltall pluss to cosinusfunksjoner ved bruk av $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, for å til sist regne ut c_k for $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

b) Fra resultatene i **a)**, verifiser Parsevel's relasjon ved å beregne signalets effekt i tids- og frekvensdomenet.

a) $\boxed{c_k = \{\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{2}{3}\}}$ b) $\boxed{\frac{19}{6}}$

Oppgave 3— Basert på 4.32 i Manolakis & Ingle: 2 Poeng

Merk: På noen av oppgavene kan svaret skrives nesten rett ned. Da er det viktig at du henviser til reglene du har benyttet deg av
Gitt signalet $x(n)$ som har Fouriertransformen $X(e^{j\omega})$, finn Fouriertransformen till følgende signaler som funksjon av $X(e^{j\omega})$:

a) $x_1(n) = 2x(n+2) + 3x(3-n)$ Tips: bruk tidsskift og foldingsteoremet

c) $x_3(n) = 2e^{j0.5\pi(n-2)}x(n+2)$,

d) $x_4(n) = (x(n) - x^*(-n))/2$,

e) $x_5(n) = j^n x(n+1] + j^{-n}x(n-1)$.

Oppgave 4— DTFT og DFT. Oppgave 7.3 i Manolakis 4 Poeng

3. Let $x[n] = n(0.9)^n u[n]$.

(a) Determine the DTFT $\tilde{X}(e^{j\omega})$ of $x[n]$.

(b) Choose first $N = 20$ samples of $x[n]$ and compute the approximate DTFT $\tilde{X}_N(e^{j\omega})$ using the `fft` function. Plot magnitudes of $\tilde{X}(e^{j\omega})$ and $\tilde{X}_N(e^{j\omega})$ in one plot and compare your results.

(c) Repeat part (b) using $N = 50$.

(d) Repeat part (b) using $N = 100$.

a) Hint: First calculate the DTFT for $x(n)/n$. Then use the DTFT property of differentiation in frequency to calculate $x(n)$.
Alternatively: first insert $x(n)$ into the defintion of the DTFT, write this as a derivative of a geometric sum, find the analytic expression of the geometric sum, and finally apply the derivative.

b) Hint: remember to shift the `fft` or `numpy.fft.fft` output with `fftshift` or `numpy.fft.fftshift` to plot from $(-\pi, \pi)$ instead of $(0, 2\pi)$. Try plotting the `fft` or `numpy.fft.fft` outputs with the `stem` or `matplotlib.pyplot.stem` function instead of `plot` or `matplotlib.pyplot.plot`. The magnitude plots may be clearer if they are plotted in decibels, try plotting `db (abs (...))` or `in3190.db (numpy.abs (...))` instead of just `abs (...)` or `numpy.abs (...)`.