ØV4 — Z-transformen

Innleveringsfrist: **24. september** 2021.

Ukeoppgavene skal løses selvstendig og vurderes i øvingstimene. Det forventes at alle har satt seg inn i fagets øvingsopplegg og godkjenningskrav for øvinger. Dette er beskrevet påhjemmesiden til IN3190:
`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN3190/h21/informasjon-om-ovingsopplegget/`

Oppgave 1 — Oppg. 3.1 fra Manolakis 1.5 Poeng

Determine the z-transform and sketch the pole-zero plot with the ROC for each of the following sequences

(a) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u[n] - u[n-10])$,

(b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$,

(c) $x[n] = 5^{|n|}$,

Oppgave 2— Z–Transform, hentet fra eksamen 2014 1.5 poeng

a) Vis at Z–transformen ikke eksisterer for det diskrete signalet $x[n] = 1$, for $-\infty \leq n \leq \infty$. 0.5 p.

b) Bevis *derivasjons*-egenskapen gitt under til den tosidige Z–transformen:

$$\frac{d}{dz} X(z) = -\frac{\mathcal{Z}\{n\, x(n)\}}{z},$$

der $X(z) = \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$. Her angir $\mathcal{Z}$ Z–transformoperatoren. 0.5 p.

c) Z–transformen $X[z]$ til et kausalt diskret signal $x[n]$ er

$$X[z] = \frac{10z^3 + 40z}{z(z^2 - 2z - 3)}$$

1. Finn poler og nullpukter til $X[z]$ og angi deres orden. 0.5 p.

Oppgave 3— Exam task in 2012: Z-transform and region of convergence (ROC) 3 poeng

a) Find the Z-transform and ROC to the data sequence

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{for} \quad n \in [-2, 2], \quad n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{for} \quad n = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\mathbb{Z}$ represents the room of integer numbers.

b) Find the Z-transform and ROC to the function

$$x(n) = n 2^{n-1} u(n-1)$$

Hint: You can apply some properties of the Z-transform to simplify the task – or you can go directly into the Z-transform definition an apply an appropriate variable substitution.

c) Consider two finite data sequences $x(n)$ and $h(n)$. Show that this rule for convolution holds:

$$x(n) * h(n) \stackrel{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)H(z),$$

where $*$ denotes the convolution operator. Briefly explain why this property can be useful.

Oppgave 4— Deler av eksamensoppgave fra 2017: Midlingsfilter 4 poeng

Et system kan beskrives ved sin impulsrespons, $h[n]$, slik at utsignalet er gitt som $y[n] = h[n] * x[n]$.

a) Et system har $h[n] = \{1, \underline{2}, 3, 3\}$. Skisser $h[n]$ og uttrykk $h[n]$ ved hjelp av en sum av forskjellige enhetssprangfunksjoner (unit steps). Figurakser skal benevnes. 0.5 p.

b) Hva er energien til systemet? Er systemet kausalt? Begrunn svaret. 0.5 p.

c) Finn $h[-n+1]$. 0.5 p.

d) Finn $y[n]$ når $x[n] = \{\underline{1}, 0, 1\}$ og $h[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4\}$. Vis utregning. 0.5 p.

e) Du skal nå designe et system som er et midlingsfilter. For hver n skal $y[n]$ være et gjennomsnitt av nåværende inputsignal $x[n]$ og de to foregående verdiene til inputsignalet.

- Skriv differensligningen til $y[n]$ gitt $x[n]$. 0.5 p.
- Er systemet rekursivt? Begrunn svaret. 0.5 p.

f) Bestem og skisser systemets impulserespons. Figurakser skal benevnes. 0.5 p.

g) Vi har fått gitt at at midlingsfiltersystemets transferfunksjon er

$$H(z) = \frac{1}{3z^2}(z^2 + z + 1)$$

Hva er nullpunktene og polene til systemet? Skisser pol-nullpunktsplottet til systemet. 0.5 p.