

# ØV1 — TRIGONOMETRI, KOMPLEKSE TALL OG GEOMETRISKE REKKER

Innleveringsfrist: 3. september 2021.

Ukeoppgavene skal løses selvstendig og vurderes i øvingstimene. Det forventes at alle har satt seg inn i fagets øvingsopplegg og godkjenningskrav for øvinger. Dette er beskrevet på hjemmesiden til IN3190:

<http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN3190/h21/informasjon-om-ovingsopplegget/>

Mål: Kurset IN3190 krever en viss grad av kunnskap om matematikk, både i form av kjennskap til teori og erfaring med bruk og praktisk regning. Oppgavene her oppsummerer en del av de viktigste punktene man bør kjenne til.

## Oppgave 1 Trigonometriske funksjoner

2 Poeng

a) Plott følgende trigonometriske funksjoner under hverandre (med parallelle t-akser) for intervallet  $-1 \leq t \leq 2.5$ , slik at du får vist hvordan de forholder seg til hverandre mht. frekvens og faseskift. *1/4p pr deloppg*

1.  $\cos(2\pi t)$
2.  $\cos(2\pi t + \pi)$
3.  $\cos(8\pi t)$
4.  $\cos(4\pi t - \pi/3)$

b) Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i Figur 1. *1/4p pr deloppg*

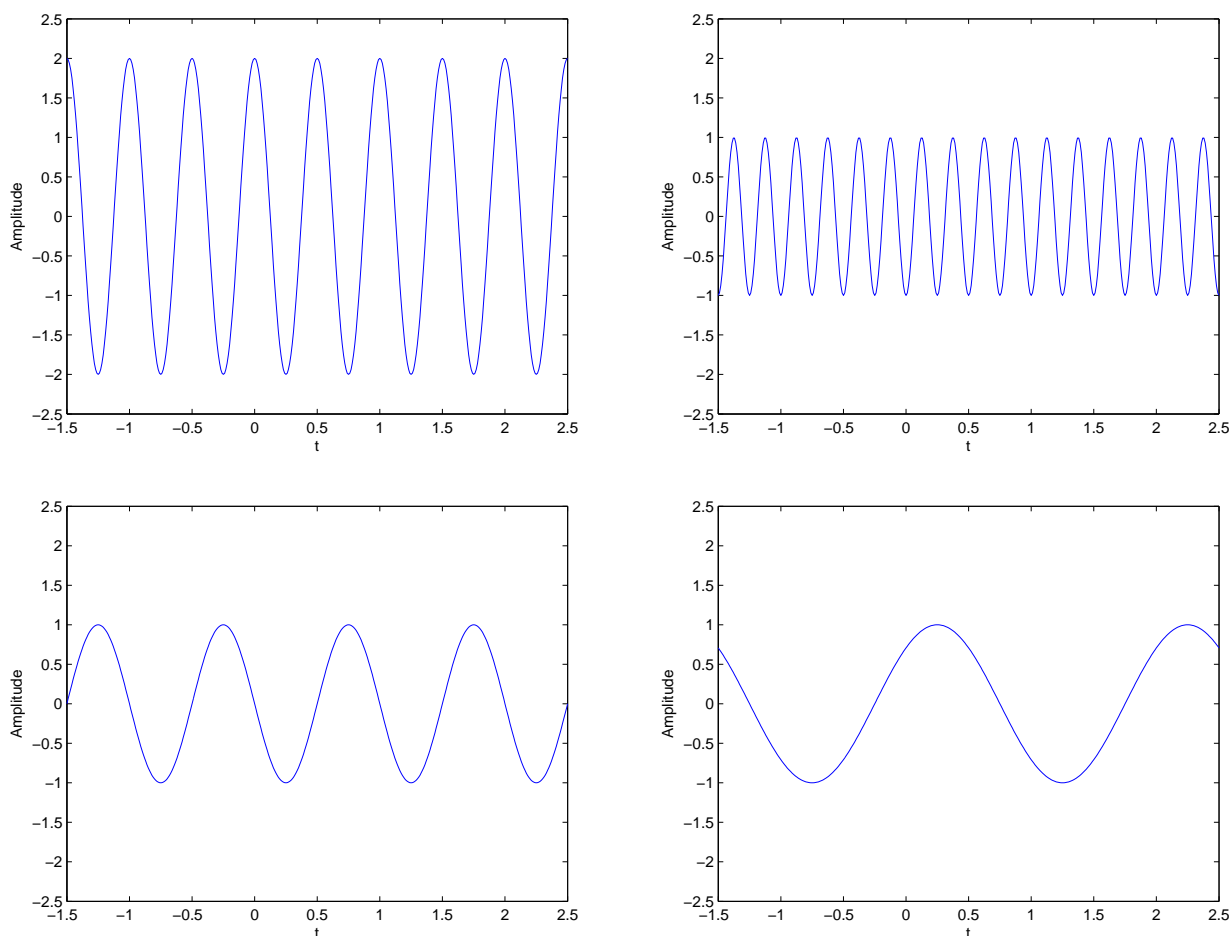


Figure 1: Finn frekvens, faseskift og amplitude for cosinus-funksjonene i figur.

## Oppgave 2 Diskrete trigonometriske funksjoner

1.5 Poeng

a) Hvilke av de følgende *diskrete* funksjonene er periodiske, og hva er periodene deres (dvs.  $N$ )?

1/6p pr delopp

1.  $\cos(0.5n + \pi/2)$
2.  $\cos(\pi n + \pi/2)$
3.  $\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi n\right)$

b) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta 5 sampler per halve periode av en cosinus i kontinuerlig tid.

1/2p

c) Angi den cosinus-funksjonen i diskret tid som vi får ved å ta sampler med avstand 1 sekunder av en cosinus i kontinuerlig tid med vinkelfrekvens 1.

1/2p

## Oppgave 3 Regning med komplekse tall

2.5 Poeng

a) Regn ut følgende for polar ( $z = re^{j\theta}$ ) og/eller kartesisk ( $z = a + jb$ ) form som angitt. Inkluder mellomregning, spesielt når svaret er oppgitt.

1/4p pr delopp

1.  $z^*$  på polar form
2.  $zz^*$  på polar og kartesisk form (hva er dette det samme som?)
3.  $z^k$  på polar form
4.  $z + z^*$  på polar og kartesisk form  $\boxed{2r \cos \phi}$
5.  $z - z^*$  på polar og kartesisk form
6.  $z^{-1}$  på polar og kartesisk form (**Merk:** oppgaven er å finne  $c$  og  $d$  slik at  $c + jd = \frac{1}{a + jb}$ , samt  $s$  og  $\phi$  slik at  $se^{j\phi} = \frac{1}{re^{j\theta}}$ )  
 $\boxed{\frac{a - jb}{a^2 + b^2}, \frac{1}{r}e^{-j\phi}}$
7. Bruk punktene over for å finne et uttrykk for  $\cos(\theta)$  og  $\sin(\theta)$  ved komplekse eksponentialer (Euler identitetene).
8. Hva er forskjellen på  $z^{-1}$  og  $z^*$ ? Beskriv  $z^{-1}$  utifra  $|z|^2$  og  $z^*$ .

b) Skriv følgende tall som komplekse tall på polar form ( $k$  er et vilkårlig heltall).

Som eksempel kan tallet 1 skrives som  $1e^{j \cdot 2\pi k}$ .

1/6p pr delopp

1.  $-1$
2.  $(-1)^k$
3.  $j^k$

## Oppgave 4 Regning med komplekse tall

2 Poeng

a) Gjør følgende utregninger. Om svaret står oppgitt må mellomregning inkluderes.

1/4p pr delopp

1.  $|3 + j4| = ?$
2.  $\frac{1}{3 + j4}$  til kartesisk form = ?  $\boxed{\frac{3}{25} - j\frac{4}{25}}$
3.  $\frac{1 + j2}{1 + e^{j\pi/2}}$  til kartesisk form = ?
4.  $(-1)^n + e^{j\pi n} = ?$ , hvor  $n$  er et heltall  $\boxed{2 \cdot (-1)^n}$

b) Vis at

1p

$$(\cos(\theta) + j\sin(\theta))^n = (\cos(n\theta) + j\sin(n\theta))$$

$\boxed{\text{Ref. til de Moivres formel}}$

## Oppgave 5 Geometriske rekker

2 Poeng

a) Beregn verdien til følgende endelige geometriske rekker:

2/9p pr deloppg

1.  $\sum_{k=0}^{100} 23^k = ?$

2.  $\sum_{k=5}^{19} (4.5)^k = ?$  ( Tips: del opp summen for å endre summasjonsgrensene).

b) Bestem hvilke av de følgende uendelige geometriske rekkene som konvergerer, og beregn verdien til disse:

2/9p pr deloppg

1.  $\sum_{k=0}^{\infty} 1^k$

2.  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{a}\right)^k, a > 4$

3.  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-k}$

4.  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}$

c) Finn konvergensområdet til følgende uendelige geometriske rekker. Om svaret er oppgitt, vis mellomregning.

2/9p pr deloppg

1.  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k, x \in \mathbb{R}$

2.  $\sum_{k=0}^{\infty} (x^{-1})^k, x \in \mathbb{R}$

3.  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{-k}, z \in \mathbb{C}$

$|z| > 2$