ØV8 — DFT

Innleveringsfrist: **5. November** 2021.

Ukeoppgavene skal løses selvstendig og vurderes i øvingstimene. Det forventes at alle har satt seg inn i fagets øvingsopplegg og godkjenningskrav for øvinger. Dette er beskrevet påhjemmesiden til IN3190:
`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN3190/h21/informasjon-om-ovingsopplegget/`

> *I tillegg til hintene inne i oppgaven i denne uken, finner dere noen tips i overlevelseshåndboken i wikien på github:*
> `https://github.uio.no/ifidsb/IN3190/wiki/Survival-guide`

Oppgave 1 — Oppgave 8.1 fra Ambardar: DFT fra definisjon Vekt: 4

Compute the DFT from its definition, for the following signals:

a) $x(n) = \{1, 2, 1, 2\}$ b) $x(n) = \{2, 1, 3, 0, 4\}$
c) $x(n) = \{2, 2, 2, 2\}$ d) $x(n) = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

- Hint: $e^{-j\pi/2} = -j, \quad e^{-j\pi} = -1, \quad e^{-j\pi/2} = -j, \quad e^{-j3\pi/2} = j$
- Hint: The DFT exhibits conjugate symmetry around $k = N/2$. Hence, $X_{\text{DFT}}(N-k) = X^{\star}_{\text{DFT}}(k)$. This way, one can save some calculation effort if only calculating the value for indices $k \leq N/2$, and then use the conjugate symmetry relation for the rest of the indices.

a) $\boxed{X_{\text{DFT}}(k) = \{6, 0, -2, 0\}}$ b) $\boxed{X_{\text{DFT}}(k) = \{10, 1.12 + j1.09, -1.12 + j4.62, -1.12 - j4.62, 1.12 - j1.09\}}$
c) $\boxed{X_{\text{DFT}}(k) = \{8, 0, 0, 0\}}$ d) $\boxed{X_{\text{DFT}}(k) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}}$

Oppgave 2— Tema: Sampling og aliasing.
Oppgave 6.01 fra Manolakis & Ingle 6 Poeng

The periodic signal $x_a(t) = 5\cos(200\pi t + \pi/6) + 4\sin(300\pi t) = \frac{5}{2}\left(e^{j200\pi t}e^{j\pi/6} + e^{-j200\pi t}e^{-j\pi/6}\right) + \frac{4}{j2}\left(e^{j300\pi t} - e^{-j300\pi t}\right)$ is sampled at a rate of $F_T = 1$ kHz to obtain the discrete-time signal $x(n)$. t is measured in seconds.

(a) Determine the spectrum $X(e^{j\omega})$ of $x(n)$.

Plot its magnitude as a function of normalized angular frequency ω in $\frac{\text{rad}}{\text{sample}}$ and as a function of frequency F in Hz. Plot the spectrum for $-2.5 \leq \omega/\pi \leq 2.5$ and $-2F_T \leq F \leq 2F_T$.

Explain whether the original signal $x_a(t)$ can be recovered from $x(n)$.

Hints:

- Finn først $X_a(j\Omega)$ ved bruk av CTFS, og så deretter $X(e^{j\omega})$, som er en skalert og periodisert versjon av $X_a(j\Omega)$. Husk også at $\omega = \Omega T = \Omega/F_T = 2\pi F/F_T$. På samme måte har vi at $\Omega_T = 2\pi F_T$.
- Hvis du bruker en dekomposisjon av $x_a(t)$ på formen

$$x_a(t) = A\left(e^{j\Omega_1 t}e^{j\phi} + e^{-j\Omega_1 t}e^{-j\phi}\right) + B\left(e^{j\Omega_2 t} - e^{-j\Omega_2 t}\right), \tag{1}$$

så har du allerede funnet $X_a(j\Omega)$ "by inspection." Vi har nemlig for invers CTFS at et periodisk signal dekomponeres i eksponenter på denne formen: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}$.

Dermed vil vi for en $x_a(t)$ gitt på formen (1) ha at den i Fourier-domenet blir

$$X_a(j\Omega)\begin{cases} Ae^{j\phi}, & \text{for } \Omega = \Omega_1 \\ Ae^{-j\phi}, & \text{for } \Omega = -\Omega_1 \\ B, & \text{for } \Omega = \Omega_2 \\ -B, & \text{for } \Omega = -\Omega_2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

- Husk at sampling i tid gir periodisering / "kopiering" i Fourierdomenet, med en periodisitet Ω_T.
- Husk at $e^{jy} = \cos(y) + j\sin(y)$ som gir at $\cos(y) = \dfrac{e^{jy} + e^{-jy}}{2}$ og $\sin(y) = \dfrac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}$.
- Det kan også være nyttig å bruke at $e^{j(y+\phi)} = e^{jy}e^{j\phi}$.

(b) Repeat part (a) for $F_T = 500$ Hz.

(c) Repeat part (a) for $F_T = 100$ Hz.

(d) Comment on your results: For what sampling frequencies can the original continuous signal be reconstructed from the sampled signal? What happens when the sampling frequency is too low?