ØV10 — IIR-filtre

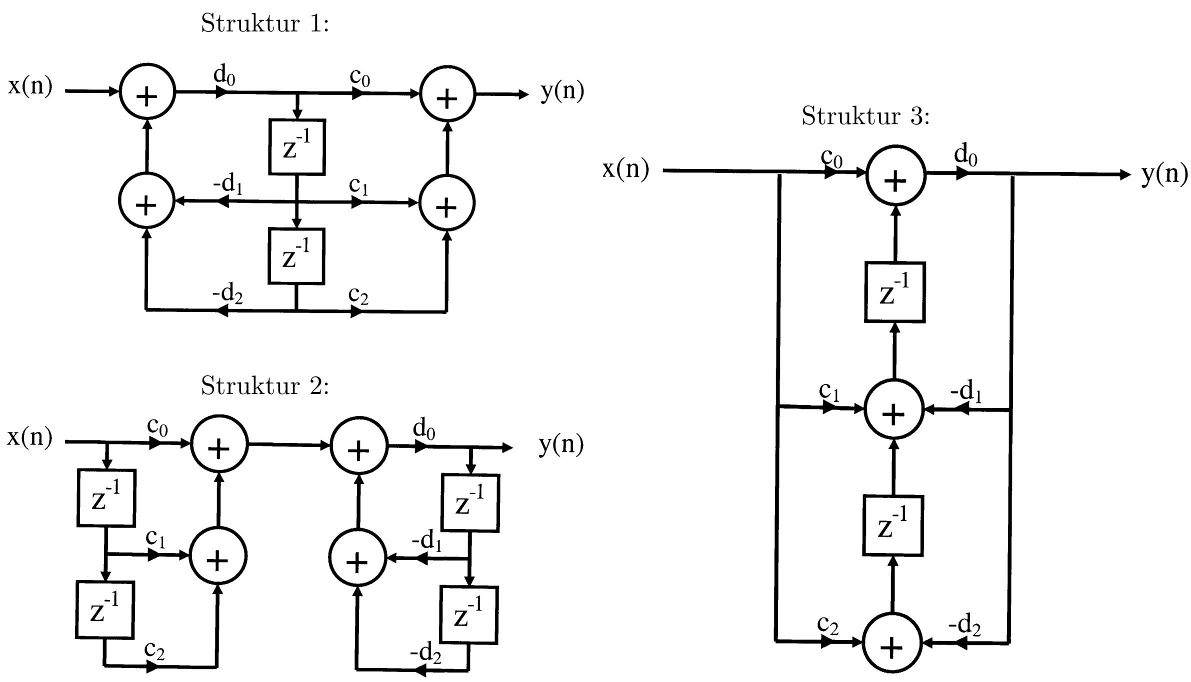
Innleveringsfrist: **19. november** 2021.

Ukeoppgavene skal løses selvstendig og vurderes i øvingstimene. Det forventes at alle har satt seg inn i fagets øvingsopplegg og godkjenningskrav for øvinger. Dette er beskrevet påhjemmesiden til IN3190:
`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN3190/h21/informasjon-om-ovingsopplegget/`

Oppgave 1 — Strukturer 1 Points

To systemfunksjoner, $G(z)$ og $H(z)$, er gitt som følger:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1/d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}} \\
\text{og} \quad H(z) &= \frac{1/d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}}{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}.
\end{aligned}
$$



Figur 1: Filterstrukturer

Figur 1 viser 3 forskjellige filterstrukturer. For filterstruktur 1-3, avgjør om strukturen implementerer filteret beskrevet av systemfunksjon $G(z)$, $H(z)$ eller eventuelt et annet filter.

Oppgave 2 — Filterdesign 4 Points

2a

Vi lar $y[n] = x[R-n]$, der $x[n]$ er en reell sekvens. Vis at z-transformen til $y[n]$ kan skrives som

$$Y(z) = z^{-R}X(1/z).$$

2b

La nå $R = 2$, og la $x[n]$ være kausal. $X(z)$ har ett nullpunkt i $z = -1$ og tre poler i $z = \frac{\sqrt{3}}{4}(1 \pm j)$ og $z = -\frac{1}{2}$. Hva er konvergensområdet til $X(z)$?

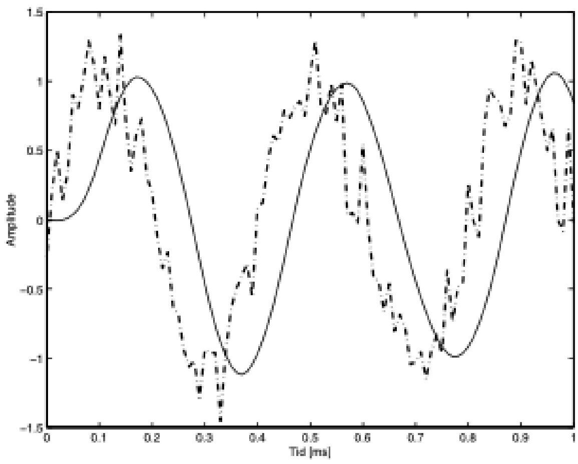
2c

Tegn pol-nullpunktsdiagrammet til $Y(z)$. Angi konvergensområdet til $Y(z)$. Er $Y(z)$ stabil? Begrunn svaret!

2d

I filterdesign arbeider vi ofte med tallverdien til frekvensresponsen uten å ta hensyn til fasen.

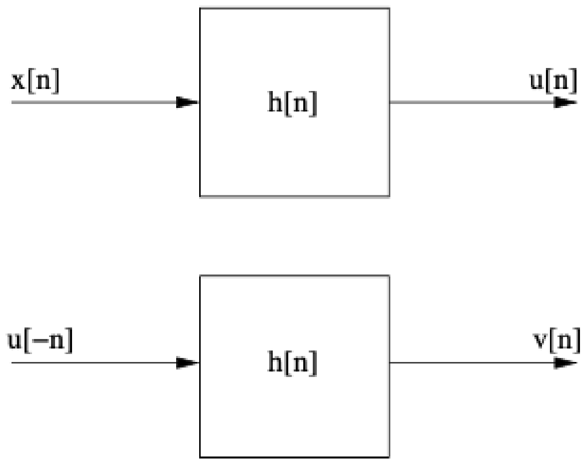
I Figur 1 ser vi en støyfylt sinus (stiplet linje) med frekvens $f_0 = 2.5\,\text{kHz}$. Denne har blitt filtrert med et 3.-ordens Butterworth filter med kuttfrekvens $f_c = 3\,\text{kHz}$. Vi ser at det filtrerte signalet (heltrukken linje) er betydelig faseforskjøvet i forhold til det støyfylte signalet.



Figur 1: Støyfylt signal (stiplet linje) filtrert med et Butterworth filter (heltrukken linje).

Til noen formål ønsker vi at fasen under filtrering skal være null. Dette er ikke mulig for kausale filtere. La oss se på en ikke-kausal metode for å få til null fase. Til dette skal vi bruke resultatene fra første del av oppgaven.

La $h[n]$ være et kausalt filter, og la $y[n] = v[-n]$, der $v[n]$ er gitt ved operasjonen vist i blokk-diagrammet i Figur 2.



Figur 2: Null-fase system.

Hva blir den samlede impulsresponsen $h_{\text{total}}[n]$ for systemet, relatert til $h[n]$? Vis at $h_{\text{total}}[n]$ har null fase.

Oppgave 3— Tema: IIR filter.
Bilinear transformation 2 Points

a) Consider the following specifications for an analog low pass filter: Passband edge frequency $\Omega_p = 2$ rad/s, Stopband edge frequency $\Omega_s = 4$ rad/s, Passband ripple $A_p = 2$ dB, Stopband attenuation $A_s = 30$ dB. Using the functions `cheb1ord` and `cheby1` in Matlab/Python, determine the filter order N and response $H(s)$ of the continuous (analogue) Chebyshev type I filter satisfying those specifications.

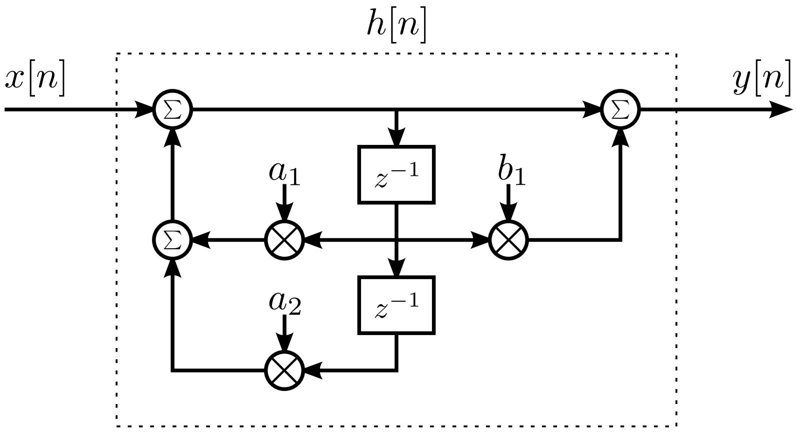
b) Using the `bilinear` function and the previously determined filter response $H(s)$, determine the response $H_d(z)$ of the discrete (digital) implementation of the analogue filter.

c) Setting $s = j\Omega$ and $z = e^{j\omega}$ plot the frequency responses of both continuous and discrete filters. Use the sampling frequency $\Omega_s = 7$ rad/s and plot the response for $0 \leq \Omega \leq 7$. How do the responses compare?

d) Verify your plots using the `freqs` and `freqz` Matlab/Python functions..

Oppgave 4 — Systemanalyse **3 Points**

Et filter er beskrevet som:



der Σ betyr sum og $\otimes$ betyr multiplikasjon.

a) Finn systemfunksjonen $H(z)$.

Bruk heretter at $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$:

b) Tegn opp pol/nullpunkt plasseringer, og avgjør hvorvidt filteret er stabilt og/eller kausalt.

c) Finn uttrykkene for filterets magnituderespons $\left|H(\Omega)\right|$ og faserespons $\Theta_H(\Omega)$. Det eneste kravet til sluttutrykkene er at de ikke skal inneholde komplekse tall. Ikke bruk tid på å prøve å forenkle dem.