

Velkommen til  
gruppetime i  
INEC1800

# Opplegg

- Gå raskt gjennom relevant pensum
  - Produksjonsfunksjon
    - Relevante former
    - Isokvant
    - Isokostnadskurve
  - Skalaavkastning
- Jobbe med oppgaver!

# Produksjonsfunksjon (teknologi)

- $Q = F(K, L)$
- $F(K, L) = KL$

• L = Arbeid (Labor)

K = Kapital

• Pris for arbeid: 6

Pris for kapital: 3

•  $w=6$  (“wages”)

$r=3$  (“interest rate”?)

$$F(K, L) = aK^\alpha L^\beta$$

$$a = \alpha = \beta = 1$$

$$\Rightarrow F(K, L) = KL$$

# Relevante formler

- Gjennomsnittsproduktivitet

$$\bullet AP_L = \frac{Q}{L} \quad AP_K = \frac{Q}{K}$$

- Marginalproduktivitet

$$\bullet MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} \quad MP_K = \frac{\partial F}{\partial K}$$

- La oss diskutere partiellderivasjon raskt... (Ikke nødvendigvis pensum)

$$Q = F(K, L)$$

$$F(K, L) = K + L$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{L} = \frac{K + L}{L}$$

# Kort om partiellderivering (IKKE PENSUM)

- $F(K, L)$  er en funksjon av to variabler. Hvordan deriverer vi den???
- Ser bare på endring i én av variablene. Leker at den andre er konstant.

- $f(x, y) = 5x + 2y^2 + 3y$

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 5$                        $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 3$

$$(2x + 5a)' = 2 + 0$$

- Marginalprodukt av henholdsvis kapital of arbeid:

- $F(K, L) = \sqrt{KL} = K^{0,5} L^{0,5}$

- $\frac{\partial F}{\partial K} = \frac{1}{2} K^{-0,5} L^{0,5} = \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{1}{2} L^{-0,5} K^{0,5} = \frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}$$

# Relevante formler

- Gjennomsnittsproduktivitet

$$\bullet AP_L = \frac{Q}{L} \quad AP_K = \frac{Q}{K}$$

- Marginalproduktivitet

$$\bullet MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} \quad MP_K = \frac{\partial F}{\partial K}$$

- Marginal teknisk substitusjonsrate

$$\bullet F(K, L) = KL \Rightarrow K = \frac{F}{L}$$

$$\bullet MRTS = -\frac{dK}{dL}$$

$$\bullet MRTS = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Dette er samme metode som hvordan vi finner *MRS* til en nyttefunksjon!

# Isokvanter

- Samme logikk som en indifferenskurve for en nyttefunksjon.
- Kombinasjoner av arbeid og kapital som gir samme produksjon.
- $F(K, L) = KL \Rightarrow K = \frac{F}{L}$
- Velger ulike produksjonsnivåer (for eksempel  $Q = 20$ ) og får isokvant.
- På samme måte som indifferenskurver kan dette også vises i 3D.

Husker at:  
 $Q = F(K, L)$

# Isokostnadskurver (del 1 av 2)

- $F(K, L) = KL$                        $w = 6$                        $r = 3$
- $C = wL + rK$
- Isokostnadskurven finner vi ved å løse for  $K$ .
- $K = \frac{C - wL}{r}$
- Logikken ligner på isokvant, finner kombinasjoner som gir samme kostnad.
- $K = \frac{C - 6L}{3} = \frac{C}{3} - 2L$
- For å tegne dette i en 2D-graf må vi finne kostnaden til produksjonen!
- La oss ta et eksempel!



# Kostnadsminimering (optimal mengde L og K)

- $F(K, L) = KL$        $w = 6$        $r = 3$
- Hva er optimal mengde K og L for å produsere 50 enheter?
- $MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K}{L} = \frac{6}{3} \Rightarrow K = 2L$
- $Q = KL = 2L^2 = 50 \Rightarrow L = 5 \Rightarrow K = 10$
- Oppgave løst! MRTS kan også finnes slik:
- $F(K, L) = KL \Rightarrow K = \frac{F}{L}$
- $MRTS = -\frac{dK}{dL} = -\left(-\frac{F}{L^2}\right) = \frac{F}{L^2} = \frac{KL}{L^2} = \frac{K}{L}$

Optimalt forhold når:

$$MRTS = \frac{w}{r} = \frac{6}{3} = 2$$

# Isokostnadskurver (del 2 av 2)

- $F(K, L) = KL$                        $w = 6$                        $r = 3$

- $C = wL + rK$

- $C = 6 * 5 + 3 * 10 = 60$

- $K = \frac{C - wL}{r} = \frac{C}{3} - 2L$

- Isokostnadskurve:

- $K = \frac{60}{3} - 2L = 20 - 2L$

- Isokvant:

- $K = \frac{50}{L}$

I forrige oppgave fant vi ut:  
 $Q = 50 \Rightarrow L = 5 \wedge K = 10$

Fordi  $Q = 50$

# Skalaavkastning (del 1 av 2)

- $F(K, L) = 4K + 3L$
- 20 kapital og 15 arbeidskraft gir oss  $F(20,15) = 125$
- Hva skjer om vi dobler innsatsfaktorene? (40 kapital, 30 arbeidskraft)
  - Doblet produksjon?
  - **Mer** enn dobbelt produksjon?
  - Mindre enn dobbelt produksjon?
- $F(2K, 2L) = 8K + 6L$
- $8K + 6L = 2(4K + 3L)$
- $F(2K, 2L) = 2 * F(K, L)$

Husker at:  
 $F(K, L) = 4K + 3L$

Dobling av  
innsatsfaktorene  
doblet produksjonen!

# Skalaavkastning (del 2 av 2)

- Fagbegreper for skalaavkastning og mer generell formel:
- Konstant skalaavkastning (det vi så i forrige eksempel):
  - $F(\alpha K, \alpha L) = \alpha * F(K, L)$
- Økende skalaavkastning:
  - $F(\alpha K, \alpha L) > \alpha * F(K, L)$   $\alpha > 1$
- Avtagende skalaavkastning:
  - $F(\alpha K, \alpha L) < \alpha * F(K, L)$   $\alpha > 1$

# Jobb med oppgavesettet!

Dere finner det i timeplanen!