INEC1800 – ØKONOMI, FINANS OG REGNSKAP

EINAR BELSOM

HØST 2020

FORELESNINGSNOTAT 3

Produksjonsteknologi og kostnader*

Dette notatet oppsummerer den tredje forelesningen. Det tar sikte på å gi innsikt om hva som ligger bak kostnadsbegrepet i mikroøkonomi og bedriftsøkonomi. Kostnadsfunksjonen uttrykker minste kostnad for å produsere en gitt mengde produkt. Disse minimumskostnadene er avhengige av priser på innsatsfaktorer slik som råvarer, arbeidskraft, maskiner, arbeidskapital osv. De er også avhengige av teknologien. I økonomisk forstand uttrykker begrepet teknologi fysiske lover, tekniske løsninger, organisatoriske forhold osv. Standard måte å beskrive denne komplekse sammenhengen går ut på å formulere en matematisk funksjon, produksjonsfunksjonen (også kalt produktfunksjonen) som angir en sammenheng mellom bruk av innsatsfaktorer og produsert mengde. Framstillingen bygger i det alt vesentlige på kapittel 5 i læreboken (Baye, Prince 2017).

Teknologi, substitusjon og isokvanter

En produsent av dingser bruker en rekke innsatsfaktorer i produksjonen. Men for at vi skal kunne illustrere i to dimensjoner på papir, kan vi fokusere på for eksempel kun kapital og arbeidskraft. For en gitt mengde av disse to innsatsfaktorene, kan produsenten kun produsere et begrenset antall dingser. *Produktfunksjonen* $F(K, L)$ uttrykker det største tallet dingser, Q, produsenten kan produsere. Dersom vi kaller mengden kapital for K og mengden arbeidskraft for L, kan vi skrive:

$$Q = F(K, L)$$

For å kunne si nøyaktig hvordan funksjonen skal formuleres matematisk, må vi vite litt om hvordan produksjonen faktisk foregår. Anta som et eksempel at sammenhengen var som følger:

$$Q = F(K, L) = 3K + 2L$$

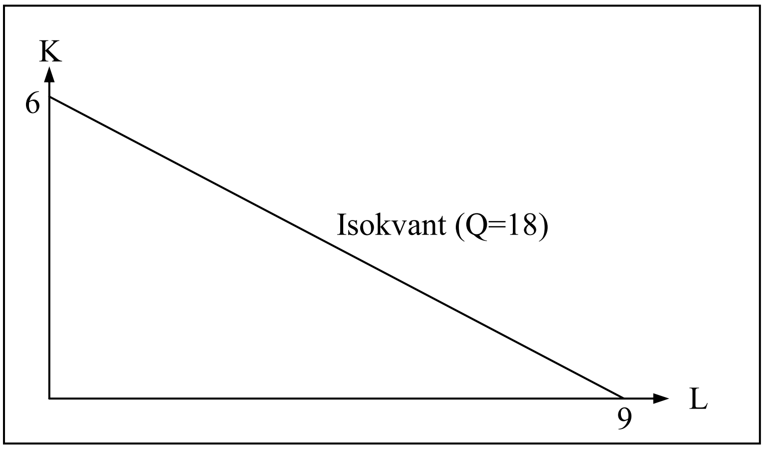
Nå er det lett å beregne hvor stor produksjonen blir for ulike verdier av mengde kapital og arbeidskraft. Og vi ser lett at enkelte kombinasjoner av arbeid og kapital gir samme mengde produkt. For eksempel vil fire enheter kapital og tre enheter arbeid gi 18 dingser. Det vil også to enheter kapital og seks enheter arbeid. Ofte er det nyttig å fokusere på mulighetene for å redusere en innsatsfaktor og øke en annen samtidig som total produksjon ikke endrer seg. Denne prosessen kalles substitusjon og illustreres gjerne ved hjelp av *isokvanter*. En isokvant viser sammenhengen mellom innsatsfaktorer når produsert mengde er konstant. Ta eksemplet vårt med en produksjon på 18. Isokvanten, dvs. sammenhengen mellom K og L for produksjon lik 18, finner vi ved å løse en likning:

$$3K + 2L = 18 \Leftrightarrow K = 6 - \frac{2}{3}L$$

Vi har nå funnet funksjonsformen for isokvanten og kan tegne den i et diagram:

---

* Forelesningsnotatet bygger på temaer diskutert i lærebokens kapittel 5.



For å beskrive graden av substitusjonsmuligheter bruker vi begrepet *marginal teknisk substitusjonsrate* (MRTS). Det er absoluttverdien til stigningstallet til isokvanten. I eksempelet vårt er altså den marginale tekniske substitusjonsraten mellom kapital og arbeid konstant langs isokvanten og er lik to tredjedeler. Det betyr at vi kan substituere bort to tredjedeler enheter kapital for hver enhet arbeid.

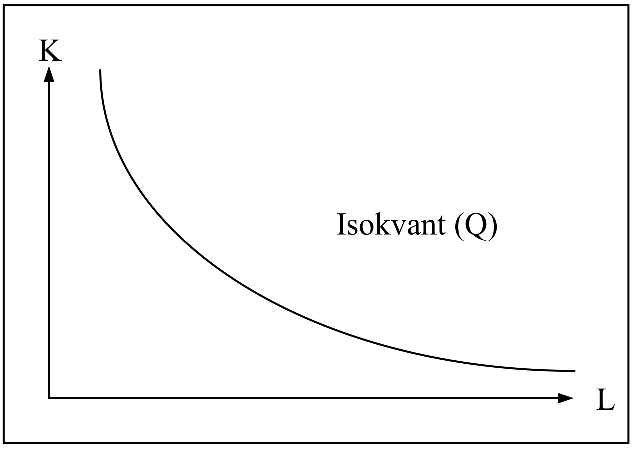
Det er sjelden en lineær sammenheng mellom innsatsfaktorer og produksjon. Og vanligvis vil vi anta at isokvanter er buet inn mot origo. Ta for eksempel følgende produktfunksjon:

$$Q = F(K, L) = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$$

La oss så finne isokvanten for mengden Q:

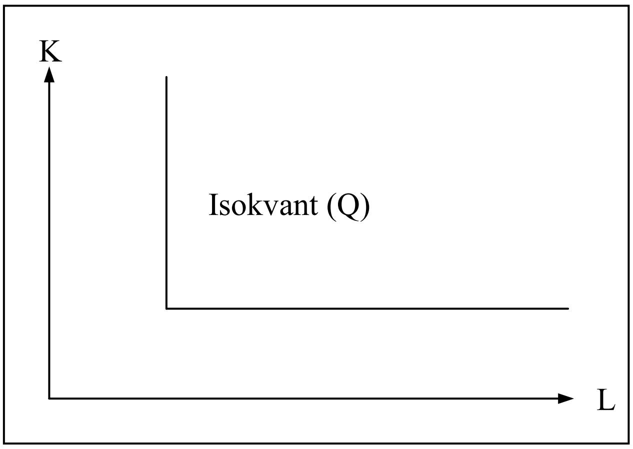
$$K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} = Q \Rightarrow K = \frac{Q^2}{L}$$

En slik isokvant blir buet slik figuren under viser:



En buet isokvant uttrykker en avtagende marginal teknisk substitusjonsrate. Det betyr at når vi substituerer den ene faktoren for den andre, vil det kreves stadig mer for hver enhet reduksjon. For et lavt nivå på arbeid, for eksempel, kan vi substituere mye kapital for hver enhet ekstra arbeidsinnsats, mens for et høyt nivå av arbeidskraft må vi ha mange enheter ekstra arbeidsinnsats for hver enhet kapital vi kan substituere vekk. Dette regnes som normalsituasjonen, og vil oftest være mer realistisk enn for eksempel tilfellet der isokvanten er en rett linje slik at substitusjonsraten er konstant og uavhengig av forholdet mellom kapital og arbeid.

I noen situasjoner vil det i praksis være et fast forhold mellom innsatsfaktorer, og nesten ingen mulighet for substitusjon. Isokvanten kan da være en vinkel slik figuren under viser.



Produktivitet

Forholdet mellom produsert mengde og bruken av innsatsfaktorer er uttrykk for en *gjennomsnittsproduktivitet*. Vi kan definere *arbeidsproduktivitet* og *produktiviteten til kapital*:

$$AP_L = \frac{Q}{L} \quad AP_K = \frac{Q}{K}$$

Det kan være en målsetning for bedriften å øke for eksempel gjennomsnittlig arbeidsproduktivitet over tid. For beslutninger om endringer i bruk av innsatsfaktorer er det imidlertid mer sentralt å forstå *marginalproduktiviteten*. Det vil si hvor mye produsert mengde vil øke for en enhets økning i innsatsfaktoren. Denne produktiviteten omtales gjerne som *marginalprodukt* og kan defineres som følger:

$$MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} \approx \frac{\Delta F}{\Delta L} \quad MP_K = \frac{\partial F}{\partial K} \approx \frac{\Delta F}{\Delta K}$$

Merk at forholdstall mellom marginalprodukt uttrykker stigningen til isokvanten. Anta at vi vil finne en kombinasjon av endringer i arbeid og kapital som til sammen ikke endrer total mengde. Vi kan kalle disse endringene for dL og dK. Dersom vi har marginalproduktet for arbeid og ganger med endringen arbeid, får vi en endring i produsert mengde. Tilsvarende for kapital. For at produsert mengde skal være konstant, slik som på isokvanten, må summen av de to bidragene til endret mengde være null. For tilfellet med marginalprodukt uttrykt med Δ skal vi da ha:

$$\frac{\Delta F}{\Delta L} dL + \frac{\Delta F}{\Delta K} dK = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\Delta F}{\Delta L}}{\frac{\Delta F}{\Delta K}}$$

I den siste likningen over er $\frac{dK}{dL}$ stigningen til isokvanten, som altså kan skrives som minus forholdstallet mellom marginalproduktene. Siden MRTS er absoluttverdien til stigningen har vi:

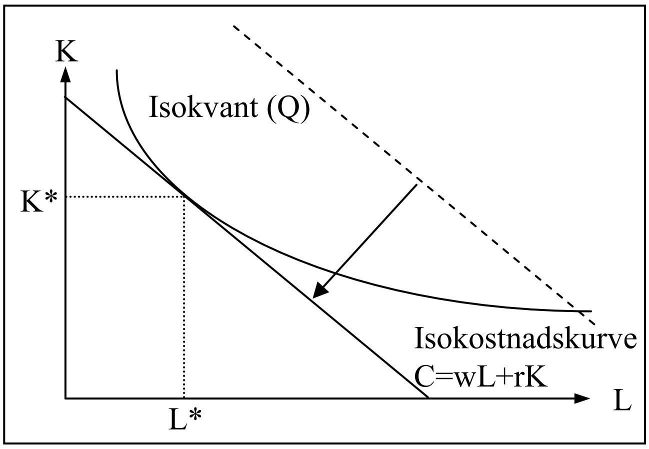
$$MRTS = \frac{\frac{\Delta F}{\Delta L}}{\frac{\Delta F}{\Delta K}} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Definisjoner med Δ er litt upresise. Tilsvarende med bruk av derivasjon blir:

$$\frac{\partial F}{\partial L}dL + \frac{\partial F}{\partial K}dK = 0 \Rightarrow \frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} \quad MRTS = \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} = \frac{MP_L}{MP_K}$$

Kostnadsfunksjonen

Vi antar at bedrifter vil ønske å minimere kostnadene sine for gitt produksjon. Kostnadsfunksjonen uttrykker disse kostnadene. Dersom bedriften har produksjonsfunksjonen, $F(K, L)$, og prisene w og r på innsatsfaktorene, blir kostnadsfunksjonen gitt ved løsningen til optimeringsproblemet der målet er å minimere kostnadene som kan skrive som $C = wL + rK$, gitt at produsert mengde skal være en viss størrelse, Q, slik at $F(K, L) = Q$. Figuren under illustrerer hvordan problemet i prinsippet kan løses†.



For kostnadsminimering ønsker vi å finne det punktet på isokvanten som gir lavest kostnader. Kostnadsnivået er bestemt av *isokostnadskurven*. Den uttrykker hvilke kombinasjoner av kapital og arbeid som gir en bestemt kostnad. De laveste kostnadene har vi når den kurven er nært origo. Vi kan tenke oss at vi starter med et høyt kostnadsnivå, som illustrert med den stiplede isokostnadskurven, og så ønsker vi å redusere kostnadsnivået så mye som mulig ved å bevege oss mot origo. Vi kan redusere kostnadene inntil isokostnadskurven ikke lenger krysser isokvanten, men kun tangerer den. Tangeringspunktet blir beste kombinasjon av kapital og arbeid. Og i tangeringspunktet må stigningen til isokostnadskurven, det vil si prisforholdet mellom kapital og arbeid, være lik stigningen til isokvanten, det vil si den marginale tekniske substitusjonsraten. Forutsetningen for kostnadsminimum er altså at prisforholdet er lik den marginale tekniske substitusjonsraten mellom faktorene:

† Rent matematisk kan optimeringsproblemet løses på tilsvarende måte som konsumentens nyttemaksimeringsproblem diskutert i forelesningsnotat 2. Lagrangefunksjonen blir $\mathcal{L} = wL + rK + \lambda(F(K, L) - Q)$. Førsteordensbetingelsene for kostnadsminimering blir her som følger: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L} = w + \lambda\frac{\partial F}{\partial L} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = r + \lambda\frac{\partial F}{\partial K} = 0$ og $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = F(K, L) - Q = 0$. De to første likningene gir $\frac{w}{\frac{\partial F}{\partial L}} = -\lambda = \frac{r}{\frac{\partial F}{\partial K}} \Leftrightarrow \frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} = \frac{w}{r}$. For å vise at venstre side i den siste likningen er MRTS, kan vi utlede uttrykket for stigningen til isokvanten. Vi har da at produsert mengde skal være på et konstant nivå, det vil si $F(K, L) = k$. Det totale differensialet av venstre side skal da være lik null. Det kan vi uttrykke slik: $\frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial L}dL = 0$. Det gir: $\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}}$. Her er venstre side stigningen til isokvanten. Siden MRTS er absoluttverdien til stigningen er det nå klart at $\frac{\frac{\partial F}{\partial L}}{\frac{\partial F}{\partial K}} = MRTS$.

$$MRTS_{KL} = \frac{w}{r}$$

Vi kan også skrive betingelsen ved hjelp av marginalproduktene:

$$MRTS_{KL} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{w}{r}$$

Vi kan nå omforme betingelsen slik:

$$\frac{MP_L}{w} = \frac{MP_K}{r}$$

Nå ser vi at bedriften skal tilpasse seg slik at marginalprodukt i forhold til pris for innsatsfaktorer er like. Dersom det for eksempel var slik at forholdet var høyere for arbeid enn kapital, ville bedriften kunne bruke en krone mindre for kapital, og en krone mer for arbeid og produsere mer. Eller den kunne holde produksjon konstant til lavere kostnad ved å redusere kapital tilsvarende en krone og så øke så mye for arbeid at det akkurat kompenserer for reduksjonen i produksjon som endringen i kapital isolert tilsier. Siden marginalprodukter for arbeid er høyere i forhold til pris for arbeid ville det tilsvare en økning på mindre enn en krone. Bare når der er likhet vil ikke bedriften kunne redusere kostnader ved å flytte pengebruk fra en faktor til en annen.

Gitt at vi vet en del om produksjonsteknologien og prisene på innsatsfaktorer, kan vi i prinsippet finne kostnadsfunksjonen som skissert over. Ved å bruke betingelsene utledet over, kan vi finne uttrykk for hvor mye av hver innsatsfaktor bedriften vil bruke for hver mengde Q. Da finner vi også uttrykk for kostnadene bedriften vil ha for hver mengde Q. Da har vi kostnadsfunksjonen.

Regneeksempel – kostnadsminimering

En bedrift har teknologi gitt ved produksjonsfunksjonen $F(K, L) = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$. Den ønsker å produsere mengden Q til lavest mulige kostnader når prisene for arbeid og kapital er henholdsvis w og r. Bedriftens kostnadsminimeringsproblem kan uttrykkes som følger:

$$\min_{K,L} C = wL + rK$$
$$s.t.\ K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} = Q$$

I det følgende vises to tilnærminger til å løse problemet som ikke krever mer enn vanlig derivasjon.

1. *Substitusjon*

   Løser begrensningen for én variabel:

   $$K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} = Q \Rightarrow K^{\frac{1}{2}} = \frac{Q}{L^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow K = \frac{Q^2}{L}$$

   Substituerer inn i målfunksjonen:

   $$C = wL + r\frac{Q^2}{L}$$

   Finner minimum ved å kreve at den deriverte skal være null:

   $$\frac{dC}{dL} = w - r\frac{Q^2}{L^2} = 0 \Rightarrow wL^2 = rQ^2 \Rightarrow L = \sqrt{\frac{r}{w}}Q$$

   Har nå funnet et uttrykk for bedriftens etterspørsel etter arbeidskraft når mengden varierer og for vilkårlige priser r og w. Finner tilsvarende uttrykk for kapitalen:

$$K = \frac{Q^2}{\sqrt{\frac{r}{w}}Q} = \sqrt{\frac{w}{r}}Q$$

Vi ser at mengdene av arbeid og kapital varierer lineært med produsert mengde. Etterspurt mengde av arbeid er økene i prisen på kapital og synkende i prisen på arbeid. Etterspurt mengde av kapital er økende i prisen på arbeid og synkende i prisen på kapital.

Vi får et uttrykk for bedriftens kostnader ved å sette inn i uttrykket for kostnader:

$$C(Q) = w\sqrt{\frac{r}{w}}Q + r\sqrt{\frac{w}{r}}Q = 2\sqrt{wr}Q$$

I dette tilfellet blir kostnadene lineære i mengden. De vokser langsommere enn lineært i hver av prisene, men dersom begge priser øker med samme faktor så vokser kostnadene lineært i den faktoren.

2. *Marginal teknisk substitusjonsrate er lik prisforholdet*

Vi vil utnytte at:

$$MRTS = \frac{w}{r}$$

Vi så over at isokvanten kan uttrykkes som følger:

$$K = \frac{Q^2}{L}$$

MRTS blir minus den deriverte:

$$MRTS = -\frac{dK}{dL} = -\left(-\frac{Q^2}{L^2}\right) = \frac{Q^2}{L^2}$$

Ved å utnytte at $Q = K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$ kan vi også skrive:

$$MRTS = \frac{\left(K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}\right)^2}{L^2} = \frac{KL}{L^2} = \frac{K}{L}$$

Vi kan også finne MRTS via marginalproduktene, men det krever partiell derivasjon. Den partielle derivasjonen krever bare at vi greier å opptre som om alle andre variable enn den vi deriverer med hensyn på, er konstanter. Det blir som følger:

$$MP_L = \frac{\partial F}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}\left(K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}$$

$$MP_K = \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}\left(K^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$$

Vi har nå:

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\frac{1}{2}K^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}} = \frac{K}{L}$$

Nå kan vi utnytte at MRTS må være lik prisforholdet:

$$MRTS = \frac{K}{L} = \frac{w}{r} \Rightarrow \mathrm{K} = \frac{w}{r}\mathrm{L}$$

Finner etterspørselen etter arbeidskraft ved å substituere inn i produksjonsfunksjonen:

$$\left(\frac{w}{r}\mathrm{L}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} = Q \Rightarrow \mathrm{L} = \sqrt{\frac{r}{w}}Q$$

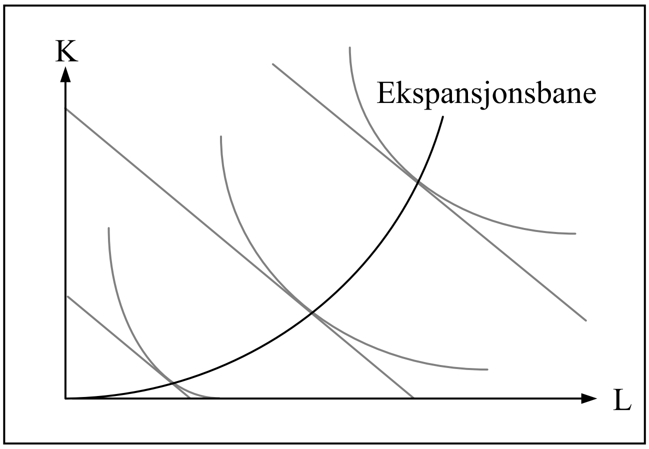
Finner så uttrykket for etterspørselen etter kapital:

$$\mathrm{K} = \frac{w}{r}\sqrt{\frac{r}{w}}Q = \sqrt{\frac{w}{r}}Q$$

Resultatene blir naturligvis nøyaktig de samme som når vi løste problemet via substitusjon.

Ekspansjonsbane

Teknologien sammen med prisene på innsatsfaktorer bestemmer optimal bruk av innsatsfaktorer i produksjon. Typisk vil optimalt forhold mellom de ulike innsatsfaktorene være avhengig av hvor mye som skal produseres. En måte å framstille denne sammenhengen er gjennom en såkalt ekspansjonsbane. Den viser optimal bruk av innsatsfaktorer for ulike nivåer av produksjon, og vi kan tenke oss at den framkommer ved å velge ulike isokvanter og finne optimal produksjon for hver av dem slik figuren under viser:



Formen på ekspansjonsbanen viser hvordan etterspørselen etter innsatsfaktorene vil variere med produsert mengde. I figuren ser vi at ved ekspansjon vil bedriften, gitt at prisene på kapital og arbeid ikke påvirkes, etterspørre en større andel kapital i forhold til arbeidskraft. Men det er altså avhengig av teknologien. I andre tilfeller kan forholdet være uforandret slik at vi får ei rett linje, eller ekspansjonsbanen kan gå i retning av større andel arbeidskraft.

Kostnadsbegreper

Vi antar at bedriften søker å minimere kostnadene knyttet til ulike ressurser, innsatsfaktorer, eller inputs, som brukes for å produsere hver mulig mengde. Gitt kunnskap om sammenhengen mellom totale kostnader og produsert mengde kan vi definere en del kostnadsbegreper som er nyttige i analyse av bedrifter:

$C(Q)$: Totale kostnader (total costs) som funksjon av produsert mengde, Q. [For eksempel $C(Q) = 1000000 + 800Q$.]

$MC(Q)$: Marginalkostnader (marginal costs) som funksjon av produsert mengde, Q. Det vil si ekstra kostnad ved å produser én enhet mer:

$$MC(Q) = \frac{\partial C}{\partial Q} \approx \frac{\Delta C}{\Delta Q}$$

[For eksempel $MC = 800$.]

AC(Q): Gjennomsnittskostnader, enhetskostnader (average costs) som funksjon av produsert mengde, Q.

$$AC(Q) = \frac{C}{Q}$$

[For eksempel $AC(Q) = (1000000 + 800Q)/Q$]

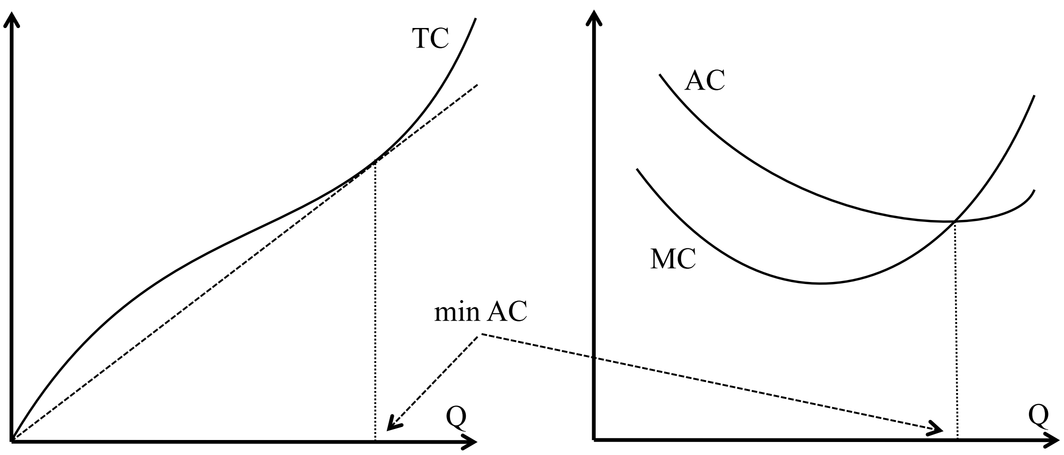
FC: Faste kostnader (fixed costs). [For eksempel $FC = 1000000$.]

$VC(Q)$: Variable kostnader (variable costs). [For eksempel $VC(Q) = 800Q$.]

Merk: Kostnader som er påløpt eller vil påløpe uansett, ”*sunk costs*”, er normalt ikke beslutningsrelevante.

Kostnader ved å ikke utnytte beste alternativ, *alternativkostnader*, er ofte beslutningsrelevante.

Minimale gjennomsnittskostnader henger sammen med at gjennomsnittskostnadene er lik marginalkostnadene. Dersom marginalkostnadene er høyere enn gjennomsnittskostnadene, så må gjennomsnittskostnadene nødvendigvis øke dersom mengden øker. Dersom marginalkostnadene er lavere enn gjennomsnittskostnadene, så må gjennomsnittskostnadene nødvendigvis synke dersom mengden øker. Bare ved likhet kan ikke gjennomsnittskostnadene synke mer ved at vi enten øker eller reduserer mengden. Figur 1 illustrerer sammenhengen mellom totalkostnader, den deriverte av totalkostnadene som jo er marginalkostnadene og gjennomsnittskostnadene.‡



Skalaavkastning

Vi har nå sett på hvordan egenskapene til teknologien påvirker det optimale forholdet mellom innsatsfaktorer for varierende produksjon. Men det er en annen egenskap som i høy grad påvirker optimal størrelse for produksjon og dermed også optimal mengde av innsatsfaktorer. Denne egenskapen kaller vi skalaavkastning. Skalaavkastning uttrykker hvor effektivt det er å endre produksjonsnivået. Med økende skalaavkastning, også kalt skalafordel, vil en økning i alle innsatsfaktorer gi en relativt større økning i produksjon. Med minkende skalaavkastning derimot, vil en økning i alle innsatsfaktorer gi en relativt mindre økning i produksjon. Og ved konstant skalaavkastning er endringen i produksjon relativt sett den samme som for innsatsfaktorene.

- Vi har økende skalaavkastning hvis: $F(\alpha K, \alpha L) > \alpha F(K, L) \quad \alpha > 1$
- Vi har avtagende skalaavkastning hvis: $F(\alpha K, \alpha L) < \alpha F(K, L) \quad \alpha > 1$
- Vi har konstant skalaavkastning hvis: $F(\alpha K, \alpha L) = \alpha F(K, L)$

‡ At førsteordensbetingelsen for minimale gjennomsnittskostnader er at gjennomsnittskostnadene er lik marginalkostnadene kan vises rent matematisk slik: $\frac{dAC}{dQ} = \frac{d}{dQ}\frac{C}{Q} = \frac{\frac{dC}{dQ}Q - C}{Q^2} = \frac{1}{Q}[MC - AC] = 0 \Rightarrow MC = AC$.

Skalaavkastning er også knyttet til marginal- og gjennomsnittskostnader. Det er nok lettest å se det for tilfellet der prisene på innsatsfaktorene antas uavhengige av etterspurt mengde fra bedriften fordi kostnadene da endres direkte proporsjonalt med endringen i innsatsfaktorene. Da må gjennomsnittskostnadene synke dersom produsert mengde øker relativt mer enn bruken av innsatsfaktorer. Og de må øke dersom produsert mengde øker relativt sett mindre. Da vil økende (avtagende) skalaavkastning henge sammen med avtagende (stigende) gjennomsnittskostnader. Og økende (avtagende) skalaavkastning henger sammen med at marginalkostnadene er lavere (høyere) enn gjennomsnittskostnadene.

Referanseliste

Baye M.R. and Prince J.T., *Managerial Economics and Business Strategy*, Ninth Edition, McGraw-Hill Education, 2017.