INEC1800 – ØKONOMI, FINANS OG REGNSKAP

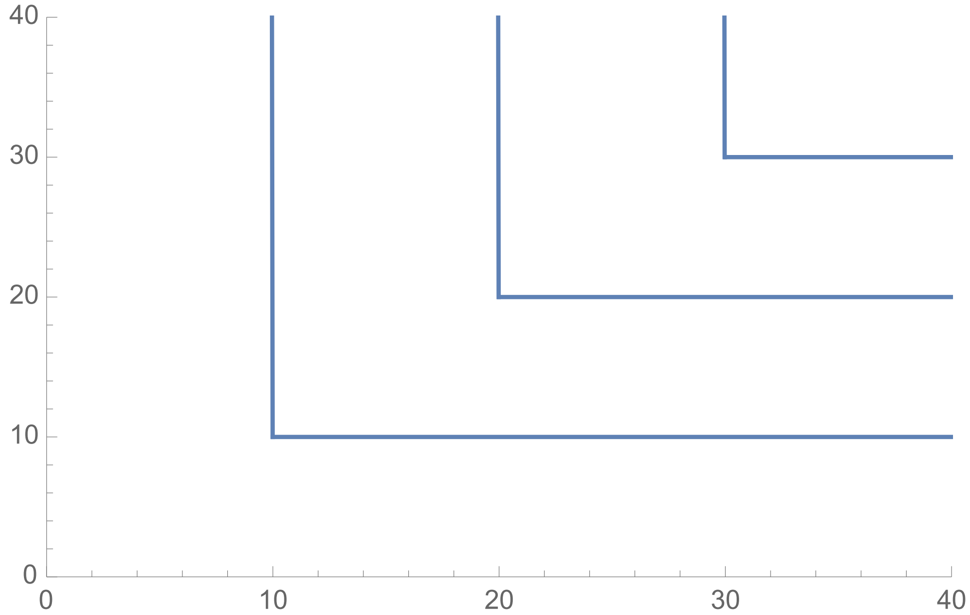
EINAR BELSOM

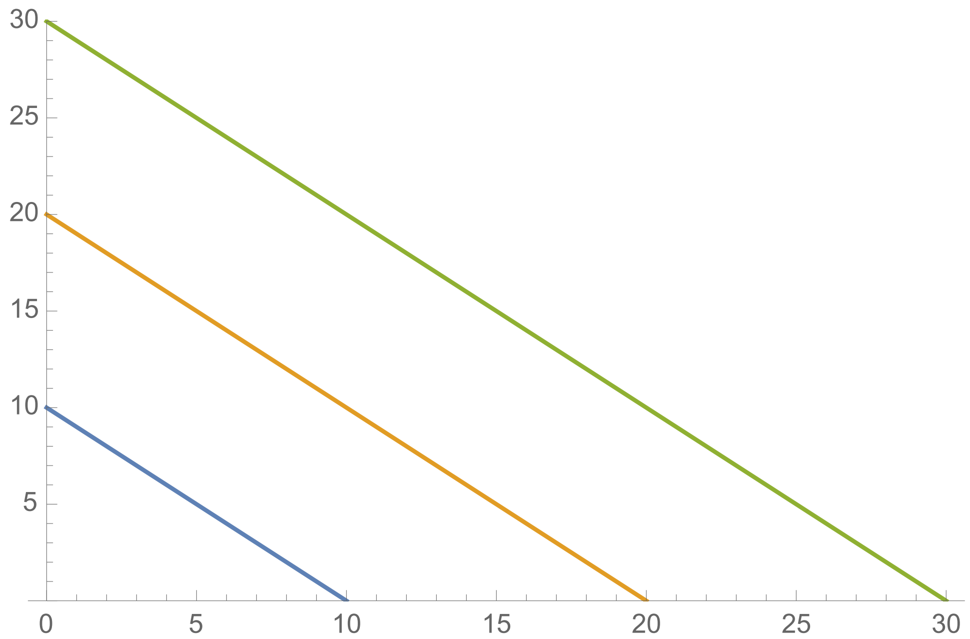
HØST 2020

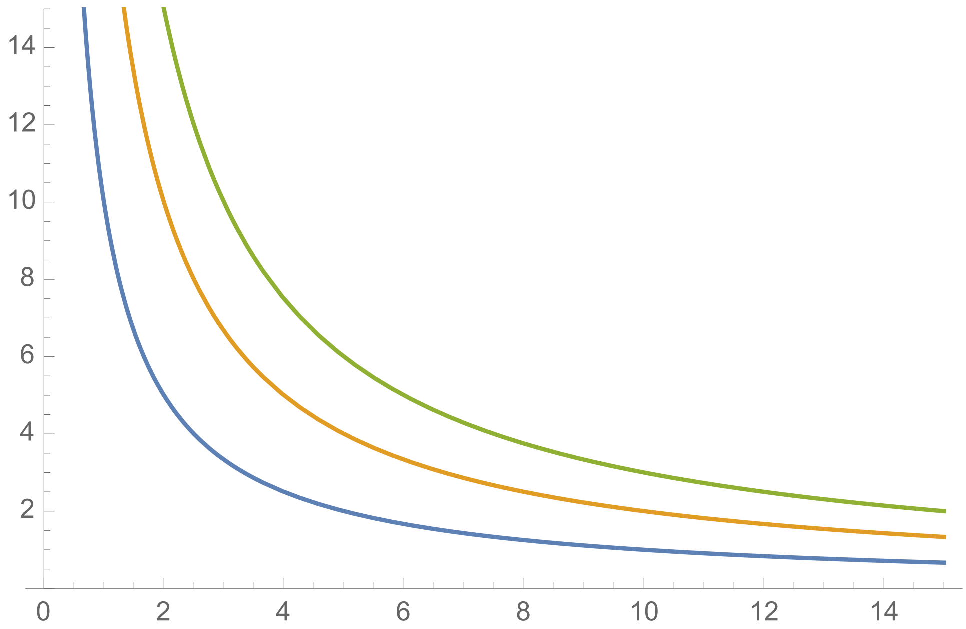
LØSNING TIL OPPGAVESETT III

Oppgave 1: Isokvanter, MRTS og skalaavkastning.

a) Figurene under viser isokvantene. For F_1 er det ikke lett eller nødvendig å uttrykke funksjonen for isokvantene for å kunne skissere dem. For $F_2(K,L) = K + L$ har vi $K + L = Q \Rightarrow K = Q - L$. For $F_3(K,L) = KL$ har vi $KL = Q \Rightarrow K = \frac{Q}{L}$.







b) Den marginale tekniske substitusjonsraten, MRTS, er absoluttverdien til stigningen til isokvantene. For F_1 er den ikke entydig definert for $K = L$. For $K > L$ er den uendelig. For $K < L$ er den 0. For F_2 er den 1 siden stigningen til isokvanten er -1. For F_3 er den $\frac{Q}{L^2}$ og K/L siden stigningen til isokvanten er $-\frac{Q}{L^2} = -\frac{KL}{L^2} = -\frac{K}{L}$.

c) Vi har at $F_1(\alpha K, \alpha L) = min\{\alpha K, \alpha L\} = \alpha \cdot min\{K, L\} = \alpha F_1(K, L)$ som innebærer konstant skalaavkastning. Vi har $F_2(\alpha K, \alpha L) = \alpha K + \alpha L = \alpha(K + L) = \alpha F_2(K, L)$ som også innebærer konstant skalaavkastning. Vi har $F_3(\alpha K, \alpha L) = \alpha K \alpha L = \alpha^2 KL = \alpha^2 F_3(K, L)$. Siden $\alpha^2 > \alpha$ for $\alpha > 1$ har vi at $F_3(\alpha K, \alpha L) > \alpha F_3(K, L)$ når $\alpha > 1$ og dermed økende skalaavkastning.

d) For F_2: $MP_K = MP_L = 1,\ AP_K = \frac{K+L}{K}, AP_L = \frac{K+L}{L}$. For F_3: $MP_K = L, MP_L = K, AP_K = \frac{KL}{K} = L, AP_L = \frac{KL}{L} = K$.

e) F_1passer når det er et fast forhold mellom kapitalutstyr og arbeidskraft slik som nå hver arbeider trenger en bestemt maskin for å kunne gjøre produktivt arbeid. F_2 utrykker en konstant MRTS slik at det er et fast antall av den ene innsatsfaktoren som kan substitueres for den andre. F_3 har fallende MRTS.

Oppgave 2: Cobb-Douglas produksjon, etterspørsel, skalaavkastning og kostnadsfunksjon

a) Optimal tilpasning har vi når den marginale substitusjonsraten er lik prisforholdet. MRTS kan finnes ved å først finne et uttrykk for isokvanten: $\sqrt{K} \cdot \sqrt{L} = Q \Rightarrow K = \frac{Q^2}{L}$. Den deriverte er da $\frac{dK}{dL} = -\frac{Q^2}{L^2}$ som gir $MRTS = \frac{Q^2}{L^2} = \frac{(\sqrt{KL})^2}{L^2} = \frac{K}{L}$. Med partiell derivasjon kan vi regne rett fra marginalproduktene: $MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{0{,}5K^{0{,}5}L^{-0{,}5}}{0{,}5K^{-0{,}5}L^{0{,}5}} = \frac{K}{L}$. Uansett får vi

$$MRTS = \frac{K}{L} = \frac{w}{r} = \frac{20}{10} \Rightarrow K = 2L$$

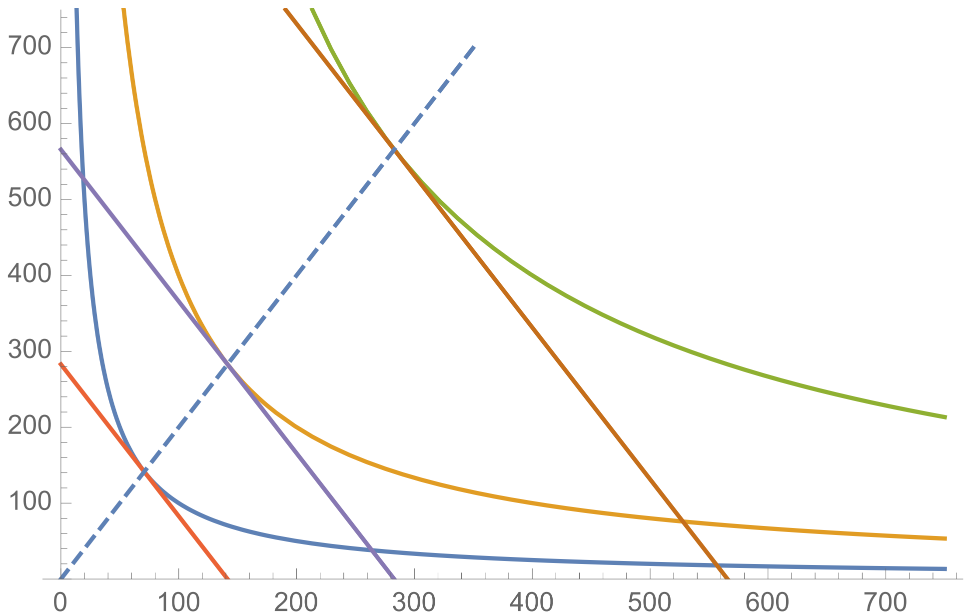
$$\sqrt{KL} = 100 \Rightarrow KL = 10000 \Rightarrow 2LL = 10000 \Rightarrow L = 50\sqrt{2} \Rightarrow K = 100\sqrt{2}$$

$$\sqrt{KL} = 200 \Rightarrow KL = 40000 \Rightarrow 2LL = 40000 \Rightarrow L = 100\sqrt{2} \Rightarrow K = 200\sqrt{2}$$

$$\sqrt{KL} = 400 \Rightarrow KL = 160000 \Rightarrow 2LL = 160000 \Rightarrow L = 200\sqrt{2} \Rightarrow K = 400\sqrt{2}$$

Alternativ kan vi jo uttrykke etterspørsel etter kapital og arbeid som funksjoner av mengden slik: $\sqrt{KL} = Q \Rightarrow \sqrt{2LL} = Q \Rightarrow L = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}Q}{2} \Rightarrow K = \frac{2Q}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}Q$. Da er det bare å sette inn for de ulike verdiene av mengden.

b) Figuren under illustrerer tilpasningene ved ulike produksjonsnivåer. Ekspansjonsbanen blir en rett linje her ettersom forholdet mellom innsatsfaktorene er konstant når produksjonen øker. Den er illustrert med den stiplede linjen. Ekspansjonsbane som blir en rett linje fra origo henger sammen med at MRTS for denne teknologien er konstant langs slike linjer. Vi så at den kunne uttrykkes som $\frac{K}{L}$. Og forholdet mellom variablene er konstant langs alle linjer ut fra origo.



c) Kostnadene for de ulike verdiene for mengden blir:

$$C(100) = 10 \cdot 100\sqrt{2} + 20 \cdot 50\sqrt{2} = 2000\sqrt{2}$$

$$C(200) = 10 \cdot 200\sqrt{2} + 20 \cdot 100\sqrt{2} = 4000\sqrt{2} = 2 \cdot 2000\sqrt{2}$$

$$C(400) = 10 \cdot 400\sqrt{2} + 20 \cdot 200\sqrt{2} = 8000\sqrt{2} = 4 \cdot 2000\sqrt{2}$$

Ser at gjennomsnittskostnaden er den samme for alle produksjonsnivåene og på $20\sqrt{2}$. Dette blir også marginalkostnaden. Marginalkostnaden er den deriverte av de variable kostnadene. Funksjonen i mengden Q som har $20\sqrt{2}$ som derivert er $C(Q) = 20\sqrt{2}Q$. Gjennomsnittskostnaden kan uttrykkes som $AC(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{20\sqrt{2}Q}{Q} = 20\sqrt{2}$.

Kostnadsfunksjonen kan også uttrykkes fra etterspørslene etter kapital og arbeid som ble beregnet i a: $C(Q) = 10K(Q) + 20L(Q) = 10\sqrt{2}Q + 20\frac{\sqrt{2}Q}{2} = 20\sqrt{2}Q$. Marginalkostnadene som er den deriverte av kostnadsfunksjonen er naturligvis $20\sqrt{2}$.

d) Finner tilpasningen for den nye prisen for arbeid:

$$MRTS = \frac{K}{L} = \frac{w}{r} = \frac{21}{10} \Rightarrow K = 2{,}1L$$

$$\sqrt{KL} = 100 \Rightarrow KL = 10000 \Rightarrow 2.1LL \Rightarrow L = \sqrt{\frac{10000}{2.1}} \approx 69 \Rightarrow K = 2{,}1\sqrt{\frac{10000}{2.1}} \approx 145$$

Etterspørselen etter arbeid synker fra $50\sqrt{2} \approx 70{,}7$ til ca 69. Etterspørselen etter kapital øker fra $100\sqrt{2} \approx 141{,}4$ til ca 145.

e) $F(\alpha K, \alpha L) = (\alpha K)^{0,5}(\alpha L)^{0,5} = \alpha^{0,5}\alpha^{0,5}K^{0,5}L^{0,5} = \alpha K^{0,5}L^{0,5} = \alpha F(K, L)$

f) Siden α er brukt som parameter i funksjonen, brukes γ til å skalere innsatsfaktorene. $F(\gamma K, \gamma L) = a(\gamma K)^{\alpha}(\gamma L)^{\beta} = \gamma^{\alpha+\beta} a K^{\alpha} L^{\beta} = \gamma^{\alpha+\beta} F(K, L)$. For $\alpha + \beta = 1$ har vi $F(\gamma K, \gamma L) = \gamma F(K, L)$ og konstant skalaavkastning. For $\alpha + \beta > 1$ har vi at $\gamma^{\alpha+\beta} > \gamma$ gitt at $\gamma > 1$og dermed økende skalaavkastning. Når $\alpha + \beta < 1$ har vi at $\gamma^{\alpha+\beta} < \gamma$ gitt at $\gamma > 1$og dermed avtagende skalaavkastning