1 Definisjoner og kommentarer 03

1.1 Korollar av Pumpelemma

Gitt en DFA med n tilstander og et ord w av lengde $m > n$ som blir akseptert av automaten. Da vil det for enhver delstreng $w' = xyz$ av w med lengde m' hvor $m' > n$, finnes en partisjon $w = w_1 w' w_2$ slik at $w_1(x(y)^* z)w_2$ blir akseptert.

Bevis: Av Pumpelemma vet vi at $w = x'y'z'$ slik at $x'(y')^* z'$ blir akseptert. La $x' = w_1 x$, $y' = y$, og $z' = zw_2$, og korollaret følger.

1.2 Eksempel: Pumpelemmabevis

Vi skal vise at $A = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ ikke er et regulært uttrykk ved bruk av pumpelemma.
Anta for motsigelse at det finnes en automat $\mathcal{D}$ som beskriver språket A med m tilstander. La videre $w = a^n b^n \in A$ være et vilkårlig valgt ord slik at $n > m$. Av korollaret over vet vi at vi kan la $a^n = xyz$ slik at alle ord på formen $(x(y)^* z)b^n$ blir akseptert. Vi vet at y er ikke-tom, og dermed at $xyyz$ vil ha fler enn n a'er. Da har vi at $(xyyz)b^n \notin A$. Dette er en motsigelse og følgelig finnes det ingen automat som kan beskrive $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$.

1.3 Definisjon

En PDA (Pushdown-automat) er et 6-tuppel $\langle \mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{Q}, s, \delta, \mathcal{A} \rangle$, hvor $\mathcal{I}$ er en endelig mengde inputsymboler, $\mathcal{S}$ er en endelig mengde stakksymboler, $\mathcal{Q}$ er en endelig mengde tilstander, $s \in \mathcal{Q}$ er starttilstanden,

$$\delta : \mathcal{Q} \times (\mathcal{I} \cup \{\Lambda\}) \times (\mathcal{S} \cup \{\Lambda\}) \to \wp(\mathcal{Q} \times \mathcal{S}^*)$$

er en transisjonsfunksjon, og $\mathcal{A}$ er en endelig mengde aksepterte tillstander.
Et ord w blir akseptert av en PDA dersom $\delta^*(w, s, \langle\rangle)$ er sann, hvor s er starttilsyanden, $\langle\rangle$ er den tomme stakken, og δ^* er en rekursivt definert relasjon gitt ved

$$\begin{aligned} \delta^*(xw, q, \langle s_1, s_2, ..., s_k \rangle) = & \bigvee_{q', s' \in \delta(q, x, s_k)} \delta^*(w, q', \langle s_1, s_2, ..., s_{k-1}, s' \rangle) \qquad \vee \\ & \bigvee_{q', s' \in \delta(q, x, \varepsilon)} \delta^*(w, q', \langle s_1, s_2, ..., s_{k-1} \rangle) \end{aligned}$$

med basisverdi

$$\delta^*(\varepsilon, q, S) = (q \in \mathcal{A} \wedge S = \langle\rangle)\,.$$

Over lar vi $\langle s_1, s_2, ..., s_k, \varepsilon \rangle = \langle s_1, s_2, ..., s_k \rangle$.