INF2080 – Logikk og beregninger

Forelesning 5: Pumpelemmaet

UiO : Institutt for informatikk

Sist oppdatert: 2012-01-31 17:14

5.1 Pumpelemmaet

Om lange stier i begrenset rom

Om lange stier i begrenset rom

- Vi har en DFA D med d tilstander og alfabet A
- Og et ord w av lengde n i alfabetet A

Om lange stier i begrenset rom

- Vi har en DFA D med d tilstander og alfabet A
- Og et ord w av lengde n i alfabetet A
- w kan sees som en sti av lengde n gjennom alfabetet A

Om lange stier i begrenset rom

- Vi har en DFA D med d tilstander og alfabet A
- Og et ord w av lengde n i alfabetet A
- w kan sees som en sti av lengde n gjennom alfabetet A
- w anvendt på D gir opphav til en sti av lengde n gjennom tilstandene

Om lange stier i begrenset rom

- Vi har en DFA D med d tilstander og alfabet A
- Og et ord w av lengde n i alfabetet A
- w kan sees som en sti av lengde n gjennom alfabetet A
- w anvendt på D gir opphav til en sti av lengde n gjennom tilstandene
- Problemet kommer når vi skal lage en sti som er lengre enn antall tilstander

Om lange stier i begrenset rom

- Vi har en DFA D med d tilstander og alfabet A
- Og et ord w av lengde n i alfabetet A
- w kan sees som en sti av lengde n gjennom alfabetet A
- w anvendt på D gir opphav til en sti av lengde n gjennom tilstandene
- Problemet kommer når vi skal lage en sti som er lengre enn antall tilstander
- Det er ingen begrensninger på hvor lange ord vi kan ha

Om lange stier i begrenset rom

- Vi har en DFA D med d tilstander og alfabet A
- Og et ord w av lengde n i alfabetet A
- w kan sees som en sti av lengde n gjennom alfabetet A
- w anvendt på D gir opphav til en sti av lengde n gjennom tilstandene
- Problemet kommer når vi skal lage en sti som er lengre enn antall tilstander
- Det er ingen begrensninger på hvor lange ord vi kan ha
- For en fast D vil vi få problemer med lange nok ord

Om lange stier i begrenset rom

- Vi har en DFA D med d tilstander og alfabet A
- Og et ord w av lengde n i alfabetet A
- w kan sees som en sti av lengde n gjennom alfabetet A
- w anvendt på D gir opphav til en sti av lengde n gjennom tilstandene
- Problemet kommer når vi skal lage en sti som er lengre enn antall tilstander
- Det er ingen begrensninger på hvor lange ord vi kan ha
- For en fast D vil vi få problemer med lange nok ord
- Pumpelemmaet gir en måte å presisere problemene

Stier og løkker

Stier og løkker

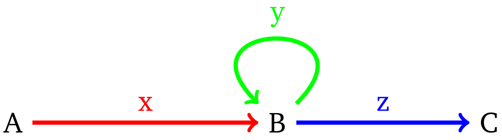
w er et akseptert ord av lengde n foret inn i en DFA D med d tilstander og $n > d$. Da gir w opphav til en sti gjennom tilstandene i D.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "x"] & & B \arrow[loop above, "y"] \arrow[rr, "z"] & & C \end{tikzcd}$$

- A er start og C er final tilstand

Stier og løkker

w er et akseptert ord av lengde n foret inn i en DFA D med d tilstander og $n > d$. Da gir w opphav til en sti gjennom tilstandene i D.



- A er start og C er final tilstand
- Vi starter på den røde stien og går etter hvert over til den grønne og til den blå

Stier og løkker

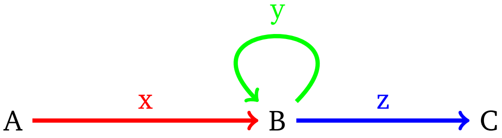
w er et akseptert ord av lengde n foret inn i en DFA D med d tilstander og $n > d$. Da gir w opphav til en sti gjennom tilstandene i D.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "x"] & B \arrow[loop above, "y"] \arrow[r, "z"] & C \end{tikzcd}$$

- A er start og C er final tilstand
- Vi starter på den røde stien og går etter hvert over til den grønne og til den blå
- Det må være minst en tilstand vi møter flere ganger — $n > d$

Stier og løkker

w er et akseptert ord av lengde n foret inn i en DFA D med d tilstander og $n > d$. Da gir w opphav til en sti gjennom tilstandene i D.



- A er start og C er final tilstand
- Vi starter på den røde stien og går etter hvert over til den grønne og til den blå
- Det må være minst en tilstand vi møter flere ganger — $n > d$
- Tilstand B er den første tilstanden vi møter to ganger

Stier og løkker

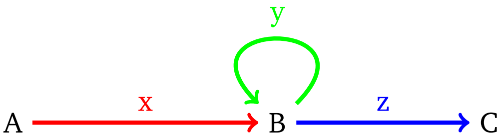
w er et akseptert ord av lengde n foret inn i en DFA D med d tilstander og $n > d$. Da gir w opphav til en sti gjennom tilstandene i D.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, red, "x"] & & B \arrow[loop above, green, "y"] \arrow[rr, blue, "z"] & & C \end{tikzcd}$$

- A er start og C er final tilstand
- Vi starter på den røde stien og går etter hvert over til den grønne og til den blå
- Det må være minst en tilstand vi møter flere ganger — $n > d$
- Tilstand B er den første tilstanden vi møter to ganger
- Etter å ha funnet B kan vi dele stien opp i en rød, grønn og blå del

Stier og løkker

w er et akseptert ord av lengde n foret inn i en DFA D med d tilstander og $n > d$. Da gir w opphav til en sti gjennom tilstandene i D.



- A er start og C er final tilstand
- Vi starter på den røde stien og går etter hvert over til den grønne og til den blå
- Det må være minst en tilstand vi møter flere ganger — $n > d$
- Tilstand B er den første tilstanden vi møter to ganger
- Etter å ha funnet B kan vi dele stien opp i en rød, grønn og blå del
- $w = xyz$ der x gir rød sti, y grønn og z blå

Stier og løkker

w er et akseptert ord av lengde n foret inn i en DFA D med d tilstander og $n > d$. Da gir w opphav til en sti gjennom tilstandene i D.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "x"] & B \arrow[loop above, "y"] \arrow[r, "z"] & C
\end{tikzcd}
$$

- A er start og C er final tilstand
- Vi starter på den røde stien og går etter hvert over til den grønne og til den blå
- Det må være minst en tilstand vi møter flere ganger — $n > d$
- Tilstand B er den første tilstanden vi møter to ganger
- Etter å ha funnet B kan vi dele stien opp i en rød, grønn og blå del
- $w = xyz$ der x gir rød sti, y grønn og z blå
- Ikke bare blir xyz akseptert, men også hele $x(y)^{\star}z$

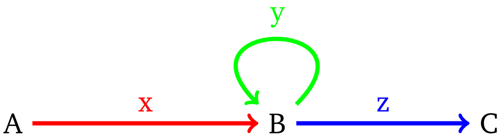
Formuleringen

Formuleringen

Teorem 5.1 (Pumpelemma)

Anta at vi har en DFA D *med* d *tilstander og et ord* w *av lengde* n *som blir akseptert av* D. *Om* $n > d$, *så kan vi dele* w *opp i* $w = xyz$ *med lengden av* $xy \leqslant n + 1$, y *ikke tom og der samtlige* $x(y)^\star z$ *blir akseptert.*

Beviset var på foregående side. Husk spesielt tegningen



DFA'er kan ikke telle

DFA'er kan ikke telle

La oss se på DFA'er D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$. Vi kan lage en slik DFA som aksepterer det unære tallet 587 og ingen andre. Det kan vi gjøre for et hvilket som helst tall $k < 1000$. Men anta at vi kan gjøre det for et tall > 1000. For eksempel 2000 — skrevet unært som 2000 1'ere. Da vil pumpelemmaet også komme med uendelig mange andre tall som også vil måtte aksepteres. La oss ta det skritt for skritt.

- Anta at vi har DFA D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$
- Anta at D svarer ja på om et ord består av n 1'ere og $n > 1000$

DFA’er kan ikke telle

La oss se på DFA’er D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$. Vi kan lage en slik DFA som aksepterer det unære tallet 587 og ingen andre. Det kan vi gjøre for et hvilket som helst tall $k < 1000$. Men anta at vi kan gjøre det for et tall > 1000. For eksempel 2000 — skrevet unært som 2000 1’ere. Da vil pumpelemmaet også komme med uendelig mange andre tall som også vil måtte aksepteres. La oss ta det skritt for skritt.

- Anta at vi har DFA D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$
- Anta at D svarer ja på om et ord består av n 1’ere og $n > 1000$
- La w være et slikt ord

DFA'er kan ikke telle

La oss se på DFA'er D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$. Vi kan lage en slik DFA som aksepterer det unære tallet 587 og ingen andre. Det kan vi gjøre for et hvilket som helst tall $k < 1000$. Men anta at vi kan gjøre det for et tall > 1000. For eksempel 2000 — skrevet unært som 2000 1'ere. Da vil pumpelemmaet også komme med uendelig mange andre tall som også vil måtte aksepteres. La oss ta det skritt for skritt.

- Anta at vi har DFA D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$
- Anta at D svarer ja på om et ord består av n 1'ere og $n > 1000$
- La w være et slikt ord
- Da kan vi skrive $w = xyz$ der $|xy| \leqslant 1001$ og $|y| \geqslant 1$

DFA’er kan ikke telle

La oss se på DFA’er D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$. Vi kan lage en slik DFA som aksepterer det unære tallet 587 og ingen andre. Det kan vi gjøre for et hvilket som helst tall $k < 1000$. Men anta at vi kan gjøre det for et tall > 1000. For eksempel 2000 — skrevet unært som 2000 1’ere. Da vil pumpelemmaet også komme med uendelig mange andre tall som også vil måtte aksepteres. La oss ta det skritt for skritt.

- Anta at vi har DFA D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$
- Anta at D svarer ja på om et ord består av n 1’ere og $n > 1000$
- La w være et slikt ord
- Da kan vi skrive $w = xyz$ der $|xy| \leqslant 1001$ og $|y| \geqslant 1$
- Da vil også D svare ja på alle ord $x(y)^\star z$

DFA'er kan ikke telle

La oss se på DFA'er D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$. Vi kan lage en slik DFA som aksepterer det unære tallet 587 og ingen andre. Det kan vi gjøre for et hvilket som helst tall $k < 1000$. Men anta at vi kan gjøre det for et tall > 1000. For eksempel 2000 — skrevet unært som 2000 1'ere. Da vil pumpelemmaet også komme med uendelig mange andre tall som også vil måtte aksepteres. La oss ta det skritt for skritt.

- Anta at vi har DFA D med 1000 tilstander i alfabetet $\{1\}$
- Anta at D svarer ja på om et ord består av n 1'ere og $n > 1000$
- La w være et slikt ord
- Da kan vi skrive $w = xyz$ der $|xy| \leqslant 1001$ og $|y| \geqslant 1$
- Da vil også D svare ja på alle ord $x(y)^\star z$
- D vil akseptere uendelig mange tall og ikke bare w

DFA'er kan addere bakfra

DFA'er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra

DFA’er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA’er med 2 tilstander

DFA'er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA'er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente

DFA’er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA’er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

DFA’er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA’er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

0

DFA'er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA'er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

$$
\begin{array}{rr}
{\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \\
 & 4 \\
 & 9 \\
\hline
 & 3
\end{array}
$$

DFA'er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA'er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

$$
\begin{array}{rrr}
{\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \\
 & 3 & 4 \\
 & 8 & 9 \\
\hline
 & 2 & 3
\end{array}
$$

DFA'er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA'er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

$$
\begin{array}{cccc}
{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \\
 & 6 & 3 & 4 \\
 & 2 & 8 & 9 \\
\hline
 & 9 & 2 & 3
\end{array}
$$

DFA'er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA'er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

$$
\begin{array}{ccccc}
{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \\
 & 2 & 6 & 3 & 4 \\
 & 3 & 2 & 8 & 9 \\
\hline
 & 5 & 9 & 2 & 3
\end{array}
$$

DFA’er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA’er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

0	0	0	1	1	0
	5	2	6	3	4
	4	3	2	8	9
	9	5	9	2	3

DFA’er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA’er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

$$
\begin{array}{ccccccc}
{\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \\
 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \\
 & 9 & 4 & 3 & 2 & 8 & 9 \\
\hline
 & 0 & 9 & 5 & 9 & 2 & 3
\end{array}
$$

DFA'er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA'er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

$$
\begin{array}{cccccccc}
{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \\
 & 0 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \\
 & 0 & 9 & 4 & 3 & 2 & 8 & 9 \\
\hline
 & 1 & 0 & 9 & 5 & 9 & 2 & 3
\end{array}
$$

DFA'er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA'er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

$$
\begin{array}{cccccccc}
{\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \\
 & 0 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \\
 & 0 & 9 & 4 & 3 & 2 & 8 & 9 \\
\hline
 & 1 & 0 & 9 & 5 & 9 & 2 & 3
\end{array}
$$

Hva er problemet med å addere forfra?

DFA’er skjønner ikke parentesuttrykk

DFA'er skjønner ikke parentesuttrykk

Vi har alfabetet $), ($ og ser på parentesuttrykk av formen $(^{\star})^{\star}$. Parentesuttrykket blir akseptert om det etter å ha startet med m venstre-parenteser, kommer nøyaktig m høyre-parenteser. Ingen DFA kan sjekke slike parentesuttrykk.

- Anta at DFA D med k tilstander kan

DFA'er skjønner ikke parentesuttrykk

Vi har alfabetet $), ($ og ser på parentesuttrykk av formen $(^\star)^\star$. Parentesuttrykket blir akseptert om det etter å ha startet med m venstre-parenteser, kommer nøyaktig m høyre-parenteser. Ingen DFA kan sjekke slike parentesuttrykk.

- Anta at DFA D med k tilstander kan
- La w være et slikt ord som blir akseptert av D

DFA'er skjønner ikke parentesuttrykk

Vi har alfabetet $), ($ og ser på parentesuttrykk av formen $(^\star)^\star$. Parentesuttrykket blir akseptert om det etter å ha startet med m venstre-parenteser, kommer nøyaktig m høyre-parenteser. Ingen DFA kan sjekke slike parentesuttrykk.

- Anta at DFA D med k tilstander kan
- La w være et slikt ord som blir akseptert av D
- Anta videre at w er lang nok til å starte med $k + 1$ venstre-parenteser

DFA'er skjønner ikke parentesuttrykk

Vi har alfabetet $), ($ og ser på parentesuttrykk av formen $(^\star)^\star$. Parentesuttrykket blir akseptert om det etter å ha startet med m venstre-parenteser, kommer nøyaktig m høyre-parenteser. Ingen DFA kan sjekke slike parentesuttrykk.

- Anta at DFA D med k tilstander kan
- La w være et slikt ord som blir akseptert av D
- Anta videre at w er lang nok til å starte med $k + 1$ venstre-parenteser
- $w = xyz$ der xy inneholder bare venstre-parenteser og y er ikke-tom

DFA'er skjønner ikke parentesuttrykk

Vi har alfabetet $), ($ og ser på parentesuttrykk av formen $(^\star)^\star$. Parentesuttrykket blir akseptert om det etter å ha startet med m venstre-parenteser, kommer nøyaktig m høyre-parenteser. Ingen DFA kan sjekke slike parentesuttrykk.

- Anta at DFA D med k tilstander kan
- La w være et slikt ord som blir akseptert av D
- Anta videre at w er lang nok til å starte med $k + 1$ venstre-parenteser
- $w = xyz$ der xy inneholder bare venstre-parenteser og y er ikke-tom
- D må også akseptere alle $x(y)^\star z$

DFA'er skjønner ikke parentesuttrykk

Vi har alfabetet $), ($ og ser på parentesuttrykk av formen $(^\star)^\star$. Parentesuttrykket blir akseptert om det etter å ha startet med m venstre-parenteser, kommer nøyaktig m høyre-parenteser. Ingen DFA kan sjekke slike parentesuttrykk.

- Anta at DFA D med k tilstander kan
- La w være et slikt ord som blir akseptert av D
- Anta videre at w er lang nok til å starte med $k+1$ venstre-parenteser
- $w = xyz$ der xy inneholder bare venstre-parenteser og y er ikke-tom
- D må også akseptere alle $x(y)^\star z$
- Av dem er bare den ene xyz et riktig parentesuttrykk. De andre har enten for få eller for mange venstre-parenteser.