

# Pumpelemmaet

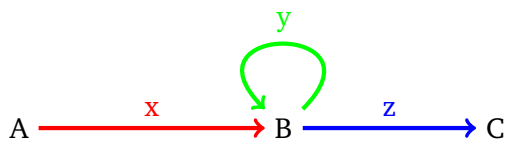
## 5.1 Pumpelemmaet

### Om lange stier i begrenset rom

- Vi har en DFA  $D$  med  $d$  tilstander og alfabet  $A$
- Og et ord  $w$  av lengde  $n$  i alfabetet  $A$
- $w$  kan sees som en sti av lengde  $n$  gjennom alfabetet  $A$
- $w$  anvendt på  $D$  gir opphav til en sti av lengde  $n$  gjennom tilstandene
- Problemet kommer når vi skal lage en sti som er lengre enn antall tilstander
- Det er ingen begrensninger på hvor lange ord vi kan ha
- For en fast  $D$  vil vi få problemer med lange nok ord
- Pumpelemmaet gir en måte å presisere problemene

### Stier og løkker

$w$  er et akseptert ord av lengde  $n$  foret inn i en DFA  $D$  med  $d$  tilstander og  $n > d$ . Da gir  $w$  opphav til en sti gjennom tilstandene i  $D$ .



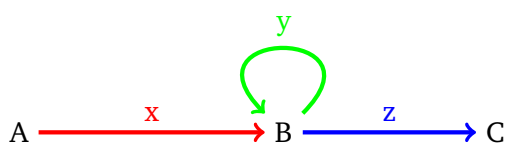
- $A$  er start og  $C$  er final tilstand
- Vi starter på den røde stien og går etter hvert over til den grønne og til den blå
- Det må være minst en tilstand vi møter flere ganger —  $n > d$
- Tilstand  $B$  er den første tilstanden vi møter to ganger
- Etter å ha funnet  $B$  kan vi dele stien opp i en rød, grønn og blå del
- $w = xyz$  der  $x$  gir rød sti,  $y$  grønn og  $z$  blå
- Ikke bare blir  $xyz$  akseptert, men også hele  $x(y)^*z$

### Formuleringen

#### Teorem 5.1 (Pumpelemma)

Anta at vi har en DFA  $D$  med  $d$  tilstander og et ord  $w$  av lengde  $n$  som blir akseptert av  $D$ . Om  $n > d$ , så kan vi dele  $w$  opp i  $w = xyz$  med lengden av  $xy \leq n + 1$ ,  $y$  ikke tom og der samtlige  $x(y)^*z$  blir akseptert.  $\dashv$

Beviset var på foregående side. Husk spesielt tegningen



## DFA'er kan ikke telle

La oss se på DFA'er  $D$  med 1000 tilstander i alfabetet  $\{1\}$ . Vi kan lage en slik DFA som aksepterer det unære tallet 587 og ingen andre. Det kan vi gjøre for et hvilket som helst tall  $k < 1000$ . Men anta at vi kan gjøre det for et tall  $> 1000$ . For eksempel 2000 — skrevet unært som 2000 1'ere. Da vil pumpelemmaet også komme med uendelig mange andre tall som også vil måtte aksepteres. La oss ta det skritt for skritt.

- Anta at vi har DFA  $D$  med 1000 tilstander i alfabetet  $\{1\}$
- Anta at  $D$  svarer ja på om et ord består av  $n$  1'ere og  $n > 1000$
- La  $w$  være et slikt ord
- Da kan vi skrive  $w = xyz$  der  $|xy| \leq 1001$  og  $|y| \geq 1$
- Da vil også  $D$  svare ja på alle ord  $x(y)^*z$
- $D$  vil akseptere uendelig mange tall og ikke bare  $w$

## DFA'er kan addere bakfra

- Det unære tallsystem er uegnet — vi ønsker å bruke liten plass på å skrive store tall
- I skolen lærer vi å addere tall i 10-tallsystemet bakfra
- Der lærer vi å regne som om vi var DFA'er med 2 tilstander
- Tilstandene er mente / ikke-mente
- Alfabetet består av tripler av sifre

$$\begin{array}{rcccccccc} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 & \\ & 0 & 9 & 4 & 3 & 2 & 8 & 9 & \\ \hline & 1 & 0 & 9 & 5 & 9 & 2 & 3 & \end{array}$$

Hva er problemet med å addere forfra?

## DFA'er skjønner ikke parentesuttrykk

Vi har alfabetet  $\{), ($  og ser på parentesuttrykk av formen  $(^*)^*$ . Parentesuttrykket blir akseptert om det etter å ha startet med  $m$  venstre-parenteser, kommer nøyaktig  $m$  høyre-parenteser. Ingen DFA kan sjekke slike parentesuttrykk.

- Anta at DFA  $D$  med  $k$  tilstander kan
- La  $w$  være et slikt ord som blir akseptert av  $D$
- Anta videre at  $w$  er lang nok til å starte med  $k + 1$  venstre-parenteser
- $w = xyz$  der  $xy$  inneholder bare venstre-parenteser og  $y$  er ikke-tom
- $D$  må også akseptere alle  $x(y)^*z$
- Av dem er bare den ene  $xy$  et riktig parentesuttrykk. De andre har enten for få eller for mange venstre-parenteser.