Forelesning 8 INF2080 – Logikk og beregninger

Beskrivelser — første-ordens logikk

8.1 Beskrivelse — første ordens logikk

Termer og ord

DFA : manipuleringer av ord i endelig alfabet
Idé : Kan beskrive et ord som en term i første ordens logikk.

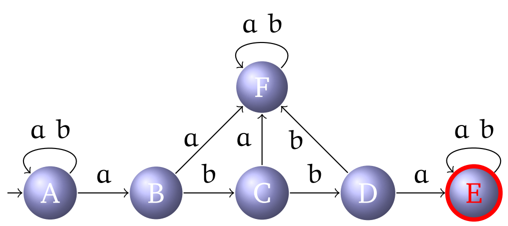
- Anta at vi har alfabet $\{a, b\}$
- I signaturen har vi
  - Unære funksjonssymboler $\underline{a}$ og $\underline{b}$
  - Konstant symbol ε
- Tilsvarende med større alfabet

Oversettelse

$\underline{\varepsilon}$	ε
$\underline{ax}$	$\underline{a}(\underline{x})$
$\underline{bx}$	$\underline{b}(\underline{x})$

Oversettelsen erstatter a med $\underline{a}$ og b med $\underline{b}$ — og føyer en ε til slutt.

Eksempel — NFA



- 1 konstant symbol ε
- 2 unære funksjons symboler $\underline{a}$, $\underline{b}$
- 6 unære relasjons symboler A, B, C, D, E, F

Vi skal beskrive en kjøring av ordet w på automaten ved

$$\mathsf{START}(w) \wedge \mathsf{TRANSITIONS} \to \mathsf{FINAL}$$

Formelen — NFA

START(w): $A(\underline{w})$

TRANSITIONS :

$$
\begin{array}{c}
\forall x.(A(\underline{a}x) \to A(x)) \land \\
\forall x.(A(\underline{b}x) \to A(x)) \land \\
\forall x.(A(\underline{a}x) \to B(x)) \land \\
\forall x.(B(\underline{a}x) \to F(x)) \land \\
\forall x.(B(\underline{b}x) \to C(x)) \land \\
\forall x.(C(\underline{a}x) \to F(x)) \land \\
\forall x.(C(\underline{b}x) \to D(x)) \land \\
\forall x.(D(\underline{a}x) \to E(x)) \land \\
\forall x.(D(\underline{b}x) \to F(x)) \land \\
\forall x.(E(\underline{a}x) \to E(x)) \land \\
\forall x.(E(\underline{b}x) \to E(x)) \land \\
\forall x.(F(\underline{a}x) \to F(x)) \land \\
\forall x.(F(\underline{a}x) \to F(x))
\end{array}
$$

FINAL : $E(\varepsilon)$

Resultat — NFA

Teorem 8.1

Om w blir akseptert, så er $\mathsf{START}(w) \land \mathsf{TRANSITIONS} \to \mathsf{FINAL}$ bevisbart. ⊣

Beviset følger trinn for trinn kjøringen av automaten.

Teorem 8.2

Om w blir ikke akseptert, så kan $\mathsf{START}(w) \land \mathsf{TRANSITIONS} \to \mathsf{FINAL}$ falsifiseres. ⊣

Anta w ikke akseptert. Vi får en falsifikasjon ved å ha som univers alle ord i alfabetet. For alle tilstander H: Anta at $w = uv$ og at vi ender opp med en tilstand H etter å ha lest u. Da tolker vi $H(v)$ som sann. Alle andre atomære setninger er usanne. Da ser vi at START og TRANSITIONS er sanne, mens FINAL er usann,